INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 14.02.2014
Clasa a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + \sqrt{2xy}$.

(3p) a) Descompuneți expresia în factori.

(4p) b) Dacă $x \cdot y = 1$, demonstrați că $E(x, y) \geq 4 + \sqrt{2}$.

Petru Vlad

2. (7p) Fie a, b, c, numere reale pozitive cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

GM 9/2013

3. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a. Punctele M, N, P, M', N', P' sunt mijloacele muchiilor $[AD]$, $[AB]$, $[AA']$, $[B'C']$, $[D'C']$, respectiv $[CC']$.

(3p) a) Calculați distanța de la punctul A la planul (MNP).

(4p) b) Calculați distanța dintre planele (PMN) şi $(P'M'N')$.

****

4. Se consideră $ABCD$ un romb cu diagonalele $AC = 8cm, BD = 6cm$. În punctul N, mijlocul segmentului $AO, AC \cap BD = O$, se ridică perpendiculara MN pe planul rombului, $MN = 2\sqrt{3}cm$. Calculați:

(3p) a) Aria triunghiului MBD.

(4p) b) Distanța de la punctul M la latura AD.

Gheorghe Floarea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a VIII-a, 2014

1. a) $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy =$ ....**(1p)**

$= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy) + (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy) =$

....................................**(1p)**

$= (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy + 1)$ ....**(1p)**

b) $x^2 + y^2 \geq 2xy = 2$ ....**(2p)**

$E(x, y) \geq (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2} + 1)$..**(1p)**

$E(x, y) \geq 4 + \sqrt{2}$ ....**(1p)**

2. $\frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ ....**(2p)**

$\frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} = \frac{c(a+b)}{4abc} = \frac{ac+bc}{4}$ ....**(2p)**

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{2(ab+bc+ac)}{4} = \frac{ab+bc+ac}{2}$ ....**(1p)**

$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$ ....**(1p)**

Finalizare ....**(1p)**

3. a) ΔMNP echilateral de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$..**(1p)**

$PA = AN = AM = \frac{a}{2}$ ....**(1p)**

Piramida $APMN$ triunghiulară regulată cu înălțimea $AO = h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ....**(1p)**

b) Se arată că planele $(MNP) \parallel (M'N'P')$ ....**(1p)**

$AC' = d(A,(PMN)) + d((MNP),(M'N'P')) + d(C',(M'N'P'))$..**(1p)**

$AC' = a\sqrt{3}$ ....**(1p)**

Distanța dintre cele două plane este $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ ....**(1p)**

4. **a)** $\Delta MNA (\sphericalangle N = 90^0) \Rightarrow MA = 4cm$ ....**(1p)**

ΔMOA echilateral $\Rightarrow MO = 4cm \Rightarrow A_{\Delta MBD} = 12cm^2$ ....**(2p)**

b) $MN \perp (AOD),\ NT \perp AD \Rightarrow MT \perp AD \Rightarrow d(M, AD) = MT$ ....**(1p)**

OR înălțime în ΔAOD, $OR = \frac{12}{5} cm$ ……………………………………...............…............**(1p)**

NT linie mijlocie în $\Delta AOR \Rightarrow NT = \frac{6}{5} cm$ …………..………………….............................**(1p)**

$\Delta MNT : MT = \frac{4\sqrt{21}}{5} cm$ ……………………………………………………………...........**(1p**
)