Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Barem - Clasa a VI-a

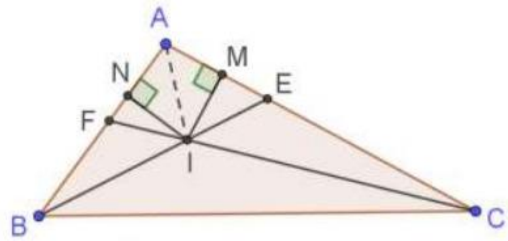
1. **a) Scrieți numărul 2021 ca sumă de puteri distincte cu baza (-2).**
   b) Arătați că numărul 2021 nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3).

a) $2021=(-2)^{12}+(-2)^{11}+(-2)^{5}+(-2)^{2}+(-2)^{0}$	**3p**
b) $(-3)^k = M_3$, pentru orice $k\geq 1$	**1p**
O sumă de puteri distincte cu baza (-3) ar putea avea ca termen pe $(-3)^0$ sau nu. Prin urmare, o suma de puteri distincte cu baza (-3) poate avea următoarele forme: M_3 sau $M_3+(-3)^0= M_3+1$	**2p**
Cum $2021= M_3+2 \Rightarrow$ 2021 nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3)	**1p**

2. **Pe o tablă sunt scrise numerele de forma *n(n+1),* cu *n*=1,2,3,...,2020. Un copil alege trei numere *a*, *b* și *c* de pe tablă, le șterge și scrie pe tablă numărul $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.**
   După 1009 astfel de operații, unul dintre numerele rămase pe tablă este 47.
   a) Calculați suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă.
   b) Aflați celelalte numere rămase pe tablă.

$a)\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2020\cdot 2021}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2021-2020}{2020\cdot 2021}$ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$	**2p**
$b)$ La fiecare operație se șterg 3 numere și se adaugă 1, deci după 1009 operații se pierd $1009\cdot 2=2018$ numere din cele 2020 scrise inițial $\Rightarrow$ pe tablă rămân 2 numere	**1p**
Deoarece $\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Rightarrow$ inversul numărului scris pe tablă după ștergerea numerelor a, b, c este egal cu suma inverselor celor 3 numere $\Rightarrow$	**2p**
suma inverselor numerelor scrise pe tablă în orice moment este constantă, fiind egală cu suma inverselor numerelor scrise inițial și anume cu $\frac{2020}{2021}$	**1p**
În concluzie, obținem că $\frac{1}{47}+\frac{1}{x}=\frac{2020}{2021}$, unde x este celălalt număr rămas pe tablă $\Rightarrow$ $43x+2021=2020x \Rightarrow x=\frac{2021}{1977}$, deci pe tablă au rămas numerele 47 și $\frac{2021}{1977}$.	**1p**

3. Fie $\Delta\boldsymbol{ABC}$ cu $\boldsymbol{m}(\sphericalangle\boldsymbol{A}) > \mathbf{90°}$. Considerăm $(\boldsymbol{BE}$ bisectoarea $\sphericalangle\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{AC}$ și $(\boldsymbol{CF}$ bisectoarea $\sphericalangle\boldsymbol{ACB}$, $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BE} \cap \boldsymbol{CF} = \{\boldsymbol{I}\}$. Știind că $\boldsymbol{IE} = \boldsymbol{IF}$ arătați că $\Delta\boldsymbol{ABC}$ este isoscel.



Fie $IN \perp AB$ și $IM \perp AC$ Deoarece I este centrul cercului înscris $\Delta ABC \Rightarrow (AI$ bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow IN = IM$	**2p**
$[IF] \equiv [IE]$ și $[IN] \equiv [IM] \overset{I.C.}{\Rightarrow} \Delta IFN \equiv \Delta IEM \Rightarrow \sphericalangle IFN \equiv \sphericalangle IEM \Rightarrow \sphericalangle IFB \equiv \sphericalangle IEC$	**2p**
$\begin{cases} \sphericalangle \mathrm{IFB} \equiv \sphericalangle \mathrm{IEC} \\ [\mathrm{IF}] \equiv [\mathrm{IE}] \\ \sphericalangle \mathrm{FIB} \equiv \sphericalangle \mathrm{EIC} \end{cases} \overset{U.L.U.}{\Longrightarrow} \Rightarrow \Delta IFB \equiv \Delta IEC \Rightarrow$	**2p**
$\Rightarrow [IB] \equiv [IC] \Rightarrow [BE] \equiv [CF] \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel	**1p**

4. Se consideră *n* unghiuri în jurul unui punct având măsurile în grade exprimate prin *n* numere prime distincte. Știind că unghiurile formate de bisectoarele oricăror două unghiuri adiacente dintre cele *n* unghiuri date inițial au măsurile în grade exprimate prin numere prime, să se determine valorile posibile ale lui *n*.

Notăm p_1, p_2, p_3, ….. , p_n cele n măsuri care sunt numere prime distincte $\Rightarrow$ $\dfrac{p_1+p_2}{2}, \dfrac{p_2+p_3}{2}, \dots, \dfrac{p_n+p_1}{2}$ sunt numere prime	**1p**
Dacă $p_i=2 \Rightarrow p_{i+1}$ impar (pentru că numerele sunt distincte) $\Rightarrow \frac{p_i+p_{i+1}}{2} \notin \mathbf{N}$, deci $p_i>2$, iar toate $\frac{p_i+p_{i+1}}{2} > 2$ și sunt prime, deci impare	**1p**
Numerele prime impare sunt fie 3, fie de forma $M_{12}+r$, unde $r \in \{1,5,7,11\}$ Dacă există două numere $p_i = M_{12}+r_1$ și $p_{i+1} = M_{12}+r_2, r_1 \neq r_2$, cu $r_1, r_2 \in \{1,5,7,11\}$ atunci $\dfrac{M_{12}+r_1+M_{12}+r_2}{2} \in \{M_{12}+2; M_{12}+3\}$ contradicție $\Rightarrow$ toate numerele p_i sunt de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{1,5,7,11\}$ sau, eventual, unul dintre numere este 3.	**1p**
Dacă toate numerele prime sunt diferite de 3 $\Rightarrow 360 = M_{12}+nr \Rightarrow n \vdots 12$ Dar cea mai mică sumă a 12 numere distincte de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{1,5,7,11\}$ este $12 + 12 \cdot (0+1+\cdots+11) = 12 \cdot 67 > 360$, ceea ce nu se poate	**1p**
Dacă unul dintre numerele prime p_i este 3, atunci, deoarece $\dfrac{3+1}{2} = 2$ și $\dfrac{5+1}{2} = 3$, $\Rightarrow r \in \{7,11\}$, iar $3 + M_{12} + (n-1)r = 360 \Rightarrow n-1 \vdots 3$ și n par $\Rightarrow n \in \{4,10,\dots\}$	**1p**
Dacă $n \geq 10$, cea mai mică sumă a 9 numere distincte de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{7,11\}$ este $63 + 12 \cdot (0+1+\cdots+8) = 495 > 357$, nu se poate $\Rightarrow n$ poate fi doar 4	**1p**
Pentru n=4 avem, de exemplu, unghiurile cu măsurile de 3, 59,167 și 131, iar măsurile unghiurilor formate de bisectoare vor fi de 31,113,149, respectiv 67 de grade.	**1p**

Societatea de Științe Matematice din România

Barem alternativ

Notăm $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ cele n măsuri care sunt numere prime distincte ⇒ $\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_2+p_3}{2}, \ldots, \frac{p_n+p_1}{2}$ sunt numere prime	**1p**
Dacă $p_i=2$ ⇒ p_{i+1} impar (pentru că numerele sunt distincte) ⇒$\frac{p_i+p_{i+1}}{2} \notin \mathbf{N}$, deci $p_i>2$, iar $\frac{p_i+p_{i+1}}{2} > 2$ și prim, deci impar ⇒ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sunt fie toate M_4+1, fie toate M_4+3	**1p**
Cum $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n = 360^0 = M_4$ ⇒ n trebuie să fie M_4	**1p**
Cum $\frac{p_i+p_{i+1}}{2} \neq 3$, prim ⇒ p_i și p_{i+1} trebuie să aibă fie amândouă aceeași formă $(M_3+1$ sau $M_3+2)$, fie unul dintre ele să fie M_3, adică 3, iar celălalt M_3+1 sau M_3+2	**1p**
Cele mai mici 12 numere prime distincte de forma M_4+1 au suma 5+13+17+29+37+41+53+61+73+89+97+101 > 360, iar suma celor mai mici nr.prime distincte de forma M_4+3 este 3+7+11+19+23+31+43+47+59+67+71+79 > 360 ⇒ $n \leq 8$.	**1p**
Dacă n=8, atunci putem avea fie unul dintre numerele p_i=3, iar toate celelalte de aceeași formă $(M_3+1$ sau $M_3+2)$, fie toate cele 8 numere de aceeași formă $(M_3+1$ sau $M_3+2)$ ⇒ suma celor 8 numere este de forma M_3+1 sau M_3+2 Cum 360=M_3 ⇒ nu se poate ⇒ n=4 este singura variantă posibilă.	**1p**
Pentru n=4 avem, de exemplu, unghiurile cu măsurile de 3, 59,167 și 131, iar măsurile unghiurilor formate de bisectoare vor fi de 31,113,149, respectiv 67 de grade.	**1p**