Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VII-a

Problema 1. Să se determine numerele întregi a, b, c care verifică egalitatea

$|ab+5-c|+|bc+1-a|+|ac+1-b|=0.$

Maricel Manea, profesor, Munteni

Problema 2. Se consideră paralelogramul ABCD şi $E\in(CD)$.

Dacă $AE\cap BC=\{F\}$ şi BE $\cap$ AD=$\{G\}$, să se demonstreze că AD $\leq \dfrac{DG+CF}{2}$.

G.M. nr. 11/2013

Problemă selectată de Dorina Andrei Nicoară, profesor, Galați

Problema 3.

In paralelogramul ABCD, $AC\cap BD=\{O\}$, $M\in[BC]$, $[BM]\equiv[MC]$, $ON\parallel DM$, $N\in[AD]$.

Să se calculeze raportul $\dfrac{AN}{ND}$.

Problemă selectată de Constantina Mihăilă, profesor, Galați

Problema 4.

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}-\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine numărul natural nenul n din egalitatea

$$2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+...+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2\cdot n+1)}\right)=1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot2013}.$$

Problemă selectată de Carmen Necula, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$\left.\begin{array}{l} \lvert ab+5-c\rvert+\lvert bc+1-a\rvert+\lvert ac+1-b\rvert=0 \\ \lvert ab+5-c\rvert\ge 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \\ \lvert bc+1-a\rvert\ge 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \\ \lvert ac+1-b\rvert\ge 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}ab+5-c=0\\ bc+1-a=0\\ ac+1-b=0\end{cases};$	**2p**
	$\begin{cases}bc+1-a=0\\ ac+1-b=0\end{cases}\Rightarrow c\cdot(b-a)+b-a=0\Leftrightarrow(b-a)\cdot(c+1)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=b\\ sau\\ c=-1\end{array}\right.$	**2p**
	1. Dacă $c=-1$ atunci $\begin{cases}a\cdot b=-6\\ a+b=1\\ a,b\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$ *sau* $\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$; $\begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=-1\end{cases}$ *sau* $\begin{cases}a=3\\ b=-2\\ c=-1\end{cases}$ *convin.*	**2p**
	2. Dacă $a=b$ atunci relaţia a doua devine $ac+1-a=0\Rightarrow a\cdot(1-c)=1$; $\left.\begin{array}{l}a\cdot(1-c)=1\\ a,b\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=1=b\\ c=0\end{cases}$ *sau* $\begin{cases}c=2\\ a=-1=b\end{cases}$ Aceste valori nu verifică relaţia $ab+5-c=0$ $\Rightarrow$ nu convin. Soluţiile sunt $\begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=-1\end{cases}$; $\begin{cases}a=3\\ b=-2\\ c=-1\end{cases}$	**1p**

2.	$CF \parallel AD \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \triangle CFE \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} = \frac{EF}{AE}$ $GD \parallel BC \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \triangle GDE \sim \triangle BCE \Rightarrow \frac{GD}{BC} = \frac{DE}{CE} = \frac{GE}{BE}$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l} \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \\ \frac{GD}{BC} = \frac{DE}{CE} \end{array}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \frac{CF}{AD} \cdot \frac{GD}{BC} = 1 \Rightarrow AD^2 = DG \cdot CF \Rightarrow$	**3p**
	$AD = \sqrt{DG \cdot CF} \le \frac{DG + CF}{2}.$	**2p**
3.	$Fie\ ON \cap BC = \{P\};$ $[OP]$ este linie mijlocie în triunghiul BDM $\Rightarrow$ punctul P este mijlocul $[BM]$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l} DM \parallel NP \\ DN \parallel MP \end{array}\right\} \Rightarrow DMPN$ paralelogram $\Rightarrow [\mathrm{DN}] \equiv [MP];$	**3p**
	$AN = AD - ND = BC - BP = CP; \frac{AN}{ND} = \frac{CP}{MP} = 3.$	**2p**
4.	$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}.$	**2p**
	$2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n + 1)} \right) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013} (1)$ $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{1 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3} \\ \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \\ \frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n - 1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n + 1)} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$	**3p**
	$2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n + 1)} \right) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n + 1)} (2)$ Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ 2n+1=2013 $\Rightarrow$ n=1006.	**2p**