INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a IX-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Dacă $a,b,c>0$, demonstraţi că $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1$.

(Prelucrare, prof. Haiduc Sorina, Colegiul Naţional „Simion Bărnuţiu" Şimleu Silvaniei)

Soluţie

Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\geq 1$ .... *2 puncte*

Aplicăm inegalitatea lui Cauchy-Schwartz pentru trei numere reale:

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\frac{a_3^2}{x_3}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{x_1+x_2+x_3},\ \forall a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},x_1,x_2,x_3>0\ (*)$$ .... *1 punct*

Fie $a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c$ şi $x_1=a^2+2ab,\ x_2=b^2+2bc,\ x_3=c^2+2ca\quad(**)$

Din $a,b,c>0\ \Rightarrow\ a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},\ x_1,x_2,x_3>0$ .... *1 punct*

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă

$$\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+2ab)+(b^2+2bc)+(c^2+2ac)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$$

Rezultă că $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1$ .... *3 puncte*

PROBLEMA 2

Să se rezolve ecuaţia $\left[x+\frac{1}{2}\right]-\{x\}=\left[2(x+1)\right]$.

(Selectată de prof. Lucaciu Simona, Colegiul Naţional „Silvania" Zalău)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Soluţie

$\left[x+\frac{1}{2}\right]-\{x\}=[2x+2]\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]-\{x\}=[2x]+2$ .... *1 punct*

Avem $\{x\}=\left[x+\frac{1}{2}\right]-[2x]-2\in\mathbb{Z}$ .... *1 punct*

Deoarece $\{x\}\in[0,1)\Rightarrow\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ .... *1 punct*

Ecuaţia devine $\left[x+\frac{1}{2}\right]=2x+2\Rightarrow 2x+2\le x+\frac{1}{2}<2x+3$ .... *2 puncte*

Obţinem $x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow\ x=-2$ .... *2 puncte*

PROBLEMA 3

Să se determine şirul de numere naturale $(a_n)_{n\ge1}$ care verifică următoarea condiţie:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n\ge1.$$

(Selectată de prof. Lucaciu Simona, Colegiul Naţional „Silvania” Zalău)

Soluţie

Pentru $n=1\Rightarrow a_1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}\Rightarrow a_1^2=1\Rightarrow a_1=1$ .... *1 punct*

Pentru $n=2\Rightarrow 1+a_2^2=\frac{2\cdot3\cdot5}{6}\Rightarrow a_2^2=4\Rightarrow a_2=2$ .... *1 punct*

Demonstrăm prin inducţie matematică: $a_n=n,\ \forall n\ge1$

Etapa I. Verificare: $n=1\Rightarrow a_1=1$ (A) .... *1 punct*

Etapa II. Demonstraţie: Presupunem $a_k=k,\ \forall k=\overline{1,n}$ şi demonstrăm $a_{n+1}=n+1$

Atunci $1^2+2^2+\ldots+n^2+a_{n+1}^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\Rightarrow$

$$a_{n+1}^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Rightarrow a_{n+1}^2=(n+1)^2\Rightarrow a_{n+1}=n+1$$ .... *3 puncte*

Conform principiului inducţiei matematice rezultă $a_n=n,\ \forall n\ge1$ .... *1 punct*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O. Fie P si Q simetricele ortocentrului şi a vârfului A faţă de mijlocul laturii BC. Să se arate că $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}$.

(Gazeta Matematică Nr.3/2014)

Soluţie

Cum P este simetricul ortocentrului ΔABC faţa de mijlocul laturii BC, rezultă că AP este diametru în cercul circumscris triunghiului, deci $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OP}$ .... *1 punct*

Q simetricul vârfului A faţă de mijlocul laturii BC, $\Rightarrow \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ .... *1 punct*

Atunci $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ .... *2 puncte*

Dar $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}\end{cases}$, de unde rezultă

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}$ .... *3 puncte*