**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ 21.02.2016**

**CLASA a VII-a**

**SOLUȚII ȘI BAREME**

**Subiectul 1**

a) Să se arate că există numere iraționale *x* pentru care $\sqrt{3-x^2}$ este număr rațional.

b) Există numere raționale *x* pentru care numărul $\sqrt{3-x^2}$ să fie rațional? Justificați răspunsul dat.

G.M. nr. 4/2015 - Ion Băetu, Botoșani

**BAREM**

a) De exemplu $x=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3-\sqrt{2}^2}=1 \in \mathbb{Q}$ sau oricare alt exemplu bun .........................3p

b) Presupunem că există numere raționale *x* pentru care $\sqrt{3-x^2}$ este rațional.

Notăm cu $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ fracțiile ireductibile care reprezintă numerele raționale *x*, respectiv $\sqrt{3-x^2}$ , cu $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, $(p, q) = 1$ .

Avem $\sqrt{3-\left(\frac{m}{n}\right)^2}=\frac{p}{q}$ și ridicând la pătrat obținem: $3n^2q^2=m^2q^2+n^2p^2$ (1). ..............1p

Din $\left.\begin{matrix} n^2 \mid m^2q^2+n^2p^2 \\ n^2 \mid n^2p^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^2 \mid m^2q^2 \Rightarrow n \mid mq$. Având $(m,n)=1 \Rightarrow n \mid q$ (2). ....................0,5p

Din $\left.\begin{matrix} q^2 \mid m^2q^2+n^2p^2 \\ q^2 \mid m^2q^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q^2 \mid n^2p^2 \Rightarrow q \mid np$. Având $(q,p)=1 \Rightarrow q \mid n$ (3). .....................0,5p

Din (2) și (3) rezultă $n=q$. Relația (1) devine $3n^2=m^2+p^2 \Leftrightarrow m^2+p^2=\mathcal{M}_3$ (4). .....0,5p

Un pătrat perfect poate avea una din formele $\mathcal{M}_3$ sau $\mathcal{M}_3+1$. Dacă suma a două pătrate perfecte este multiplu de 3, atunci fiecare este multiplu de 3. Avem deci $m=3a$ și $p=3b$ $(a,b \in \mathbb{N}^*)$ (5) ..........................................................................................1p

Din (4) și (5) avem: $3n^2=9a^2+9b^2 \Leftrightarrow n^2=3(a^2+b^2) \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow n=3c$ , $c \in \mathbb{N}^*$.

Din $m=3a$ și $n=3c$ avem, deci, $(m,n) \neq 1$ - contradicție!..........................................0,5p

**Subiectul 2**

Se consideră numerele: $S_1 = [\sqrt{1 \cdot 2}]$, $S_2 = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}]$, ... ,
$S_n = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \cdots + \left[\sqrt{n \cdot (n+1)}\right]$, unde prin $[a]$ am notat partea întragă a numărului *a* și *n* este un număr natural nenul.

a) Calculați $S_{63}$.

b) Demonstrați că numărul $A = \sqrt{2 \cdot S_n + n}$ nu este rațional, oricare ar fi numărul natural nenul *n*.

**BAREM**

a) Pentru $i \in N, i \geq 1$ avem $i^2 < i(i+1) < (i+1)^2 \Leftrightarrow$............................................1p

$i < \sqrt{i(i+1)} < i+1 \Rightarrow$ ..........................................................................................1p

$\left[\sqrt{i(i+1)}\right] = i, \forall i \in N^*$ (1) ..........................................................................1p

Aplicând relația (1), termen cu termen, sumei $S_{63}$, avem:

$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ ......................................................................1p

b) Aplicând relația (1), termen cu termen, sumei $S_n$, avem:

$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ..........................................................................0,5p

$A = \sqrt{n(n+1) + n} = \sqrt{n^2 + 2n}$ ..........................................................................0,5p

Avem $n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, deci numărul $n^2 + 2n$, fiind cuprins strict între două pătrete perfecte, nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural nenul *n*...........1p

Rădăcina pătrată a unui număr natural, care nu este pătrat perfect, nu este un număr rațional. Avem, deci, $A = \sqrt{2 \cdot S + n} = \sqrt{n^2 + 2n} \notin Q$ ..................................................................1p

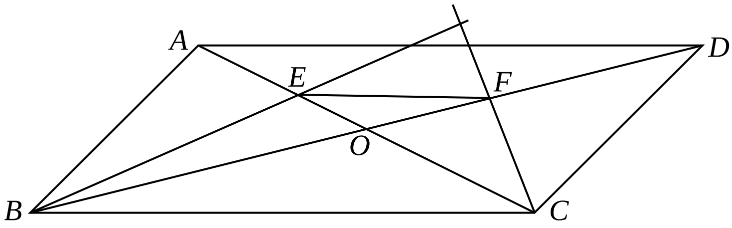
**Subiectul 3**

Fie $ABCD$ un paralelogram cu $BC > 2 \cdot AB$. Bisectoarea unghiului $ABC$ intersectează diagonala $AC$ în punctul $E$, iar bisectoarea unghului $DCB$ intersectează diagonala $BD$ în punctul $F$.

a) Arătați că aria triunghului $AEB$ este egală cu aria triunghiului $CFD$.

b) Demonstrați că dreapta $EF$ este paralelă cu dreapta $BC$.

**BAREM**




a) $\dfrac{A_{AEB}}{A_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC}$ (1) ....................................................................................................0,5p

$\dfrac{A_{CFD}}{A_{DBC}} = \dfrac{DF}{BD}$ (2) ....................................................................................................0,5p

Din teorema bisectoarei avem:

$\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AB+BC}$ (3) .............................................................................0,5p

$\dfrac{DF}{BF} = \dfrac{CD}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{DF}{BD} = \dfrac{CD}{CD+BC}$ (4) .............................................................................0,5p

Din $AB = CD$ (laturi opuse în paralelogram), (4), (3), (2) și (1), rezultă

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DF}{BD}$ (5) $\Rightarrow \dfrac{A_{AEB}}{A_{ABC}} = \dfrac{A_{CFD}}{A_{DBC}}$ (6). ......................................................................0,5p

Din $AD \parallel BC \Rightarrow d(A, BC) = d(D, BC) = d(AD, BC) \Longrightarrow$ ...............................................0,5p

$A_{ABC} = \dfrac{BC \cdot d(AD, BC)}{2} = A_{DBC}$ (7). .............................................................................0,5p

Din (6) și (7) găsim $A_{AEB} = A_{CFD}$ ...............................................................................0,5p

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Avem $AC = 2AO = 2(OE + AE)$ și $BD = 2DO = 2(OF + DF)$ ( diagonalele paralelogramului se înjumătățesc)..............................................................0,5p

Din relația (5) avem:

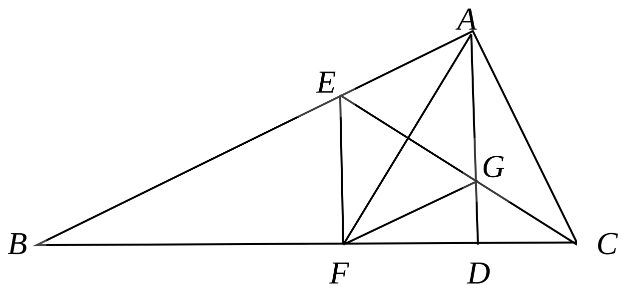
$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DF}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{2(OE+AE)} = \dfrac{DF}{2(OF+DF)} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{OE+AE} = \dfrac{DF}{OF+DF} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{OE} = \dfrac{DF}{OF}$ ..........1,5p

$\Leftrightarrow \dfrac{OE}{EA} = \dfrac{OF}{FD} \Leftrightarrow EF \parallel AD$ (reciproca teoremei lui Thales). Din $BC \parallel AD \Rightarrow EF \parallel BC$.........1p

**Subiectul 4**

Fie *ABC* un triunghi dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90^o$, $AD \perp BC, D \in (BC)$. Bisectoarea unghiului *ACB* intersectează dreapta *AD* în punctul *G* și latura *AB* în punctul *E*. Se notază cu *F* piciorul perpendicularei din *E* pe latura *BC*.
a) Arătați că patrulaterul *AEFG* este romb.
b) Dacă triunghiul *AEG* este echilateral, aflați raportul dintre aria patrulaterului *AEFG* și aria triunghiului *ABC*.

**BAREM**




a) Din proprietatea bisectoarei avem:

$EA = d(E, CA) = d(E, CB) = EF \Longrightarrow (EA) \equiv (EF)$ (1) ....................................................1p

$m(\sphericalangle AEG) = 90^o - m(\sphericalangle ACE) = 90^o - m(\sphericalangle GCD) = m(\sphericalangle DGC) = m(\sphericalangle AGE)$ ............................1p

$\Rightarrow \sphericalangle AEG \equiv \sphericalangle AGE \Rightarrow \Delta AEG$ este isoscel$\Longrightarrow (EA) \equiv (GA)$ (2) ..............................................0,5p

Din (1) și (2) avem $(EF) \equiv (GA)$ (3).

Avem $\left.\begin{array}{l} GA \perp BC \\ EF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel GA$ (4) .........................................................................0,5p

Din (3) și (4) avem *AEFG* paralelogram și din (2) rezultă că este romb. ...............................1p

b) *AEFG* romb $\Longrightarrow CE \perp AF$, deci *CE* este bisectoare și înălțime în triunghiul *AFC*

$\Rightarrow \Delta AFC$ este isoscel. (5) ...........................................................................................................0,5p

$m(\sphericalangle ACF) = m(\sphericalangle ACD) = 90^o - m(\sphericalangle DAC) = 90^o - [90^o - m(\sphericalangle EAG)] = 60^o$ (6)

Din (5) și (6) $\Rightarrow \Delta AFC$ este echilateral. .................................................................................0,5p

În $\Delta AFC$ ,echilateral, înălțimile *AD* și *CE* sunt și mediane, deci *G* este centrul de greutate al triunghiului *AFC* $\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD$ (7) ............................................................................0,5p

$m(\sphericalangle B) = 90^o - m(\sphericalangle ACB) = 90^o - 60^o = 30^o \Rightarrow$

$FD = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BC$ (teorema unghiului de $30^o$) (8) ...................................0,5p

Din (7) și (8) avem:

$A_{AEFG} = AG \cdot FD = \frac{2}{3}AD \cdot \frac{1}{4}BC = \frac{1}{3}\cdot\frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{1}{3}A_{ABC}$ . Raportul cerut este $\frac{1}{3}$ . ...................1p