Inspectoratul Şcolar Județean Mehedinți

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $\Re$ definim legea de compoziție : $x * y = \left(\sqrt[2013]{x} + \sqrt[2013]{y}\right)^{2013}$. Să se arate că $(\Re, *)$ este grup abelian şi că $(\Re, *) \cong (\Re, +)$.

SUBIECTUL II

Fie $f : \Re \to \Re;\ f(x) = \int_0^x \frac{1}{2 + \sin t}\, dt.$

a)Să se calculeze $f(2\pi)$.

b)Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2013^x - 1}$.

SUBIECTUL III

Demonstrați că: $1 \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \geq \frac{2}{\pi}$

SUBIECTUL IV

Fie $G_1 = [0,1)$. Definim pe G_1 legea de compoziție : $x * y = \{x + y\}$,
unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x.
Fie $G_2 = \{\cos t + i \sin t \mid t \in [0, 2\pi)\}$. Să se arate că $(G_1, *)$ şi $(G_2, \cdot)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

Inspectoratul Școlar Județean Mehedinți

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

Stabilitatea, asociativitatea,comutativitatea	2p
Elementul neutru este $e=0$.	1p
Simetricul elementului x este elementul $-x$.	1p
Funcția care realizează izomorfismul este $f(x)=\sqrt[2013]{x}.$	1p
Demonstrarea izomorfismului .	2p

SUBIECTUL II

a)	$f(2\pi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin t}dt$. Cu substituția $t=x+\pi$ obținem: $f(2\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\sin x}dx.$	1p
	Cu substituția $y=tg\frac{x}{2}$ obținem: $f(2\pi)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{tg\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{tg\frac{\pi+\varepsilon}{2}}\frac{1}{2+\frac{2y}{1+y^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}dy.$	2p
	$f(2\pi)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\vert_{tg\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{tg\frac{\pi-\varepsilon}{2}}$, $f(2\pi)=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$	2p
b)	Fie $g(t)=\frac{1}{2+\sin t}$ şi G o primitivă a sa.	
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2013^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}\cdot\frac{x}{2013^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+\sin x}\cdot\frac{1}{\ln 2013}=\frac{1}{2\ln 2013}$.	2p

SUBIECTUL III

$1<\frac{x}{\sin x}\le\frac{\pi}{2};\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	2p
$\frac{x}{\sin x}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x\le\pi\sin x$	1p
$2\cos x\le\pi\sin(\cos x)$	

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$	1p
$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \geq 2\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$	1p
$1 \leq \frac{x}{\sin x} \Rightarrow \sin x \leq x \Rightarrow \sin(\cos x) \leq \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.	2p

SUBIECTUL IV

$(G_1,*)$ -grup abelian.	2p
$(G_2,\cdot)$ -grup abelian.	2p
Funcția $f: G_1 \to G_2$, $f(x) = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$,este izomorfism.	3p