Al cincilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 17 mai 2018

Problema 1. Fie p un număr prim mai mare ca 5 şi $S = \{p-n^2 \mid n \in \mathbb{N},\ n^2 < p\}$. Demonstraţi că S conţine două elemente a şi b astfel încât $1 < a < b$ şi a divide b.

baraj Argentina

Soluţie:
Vom arăta că cel mai mic element al lui S care e mai mare ca 1 divide un element mai mare al lui S. Dacă p este de forma $m^2 + 1$ cu $m \in \mathbb{N}$, arătăm că $p - (m-1)^2 = 2m$ divide $p^2 - 1 = m^2$. Într-adevăr, cum m este par, rezultă că $2m \mid m^2$.
Dacă p nu este de forma $m^2 + 1$, el nu este nici de forma $m^2 + 2m$ (acesta este număr compus căci $m > 1$), deci $m^2 + 1 < p < m^2 + 2m$ pentru un anumit $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$). Arătăm că $p - m^2$, care este un element mai mare ca 1 al lui S, divide un element mai mare al lui S. Condiţia ca $p - m^2$ să dividă un număr de forma $p - n^2$ cu $n \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ este echivalentă cu $p - m^2$ divide unul din numerele $m^2 - 1^2$, $m^2 - 2^2$, ... , $m^2 - (m-1)^2$. Fiind mai mic ca $2m$, $p - m^2$ divide unul din următoarele $2m - 1$ numere consecutive: 1, 2, ... , $m - 1$, m, $m + 1$, ... , $2m - 1$. Dacă singurul din aceste numere pe care $p - m^2$ îl divide este m, adică $p - m^2$ nu divide niciunul din numerele 1, 2, ... , $m - 1$, atunci $p - m^2 \geq m$. Dar pe de altă parte, $p - m^2 \leq m$. Rezultă că $p - m^2 = m$, adică $p = m(m + 1)$, care însă este număr compus. Rezulta că $p - m^2$ divide unul din numerele unul din următoarele numere: 1, 2, ... , $m - 1$, $m + 1$, $2m - 1$, deci una din diferenţele $m^2 - 1^2$, $m^2 - 2^2$, ... , $m^2 - (m-1)^2$.

Problema 2. Fie k un număr real, cu $k > 2$.
a) Arătaţi că pentru orice numere pozitive x, y şi z are loc inegalitatea

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} > 2\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}}.$$

b) Demonstraţi că există numere pozitive x, y şi z pentru care

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} < k\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}}.$$

Leonard Giugiuc

Soluţie:

a) Avem $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}>2\sqrt{\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}} \Leftrightarrow$

$x+y+z+\sqrt{x^2+xy+yz+zx}+\sqrt{y^2+xy+yz+zx}+\sqrt{z^2+xy+yz+zx}>$ $2\cdot\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}$. Dar

$\sqrt{x^2+xy+yz+zx}>x$, $\sqrt{y^2+xy+yz+zx}>y$ şi $\sqrt{z^2+xy+yz+zx}>z$, de unde $x+y+z+\sqrt{x^2+xy+yz+zx}+\sqrt{y^2+xy+yz+zx}+$ $\sqrt{z^2+xy+yz+zx}>2(x+y+z)$. Este suficient să arătăm că

$$x+y+z\geq\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx},$$

adică

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geq(x+y)(y+z)(z+x).$$

Efectuând calculele se ajunge la $xyz\geq 0$, ceea ce este evident adevărat.

b) Fie $z=1$. Căutăm $x,y>0$ cu $y=x$ astfel încât

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}<k\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}},$$

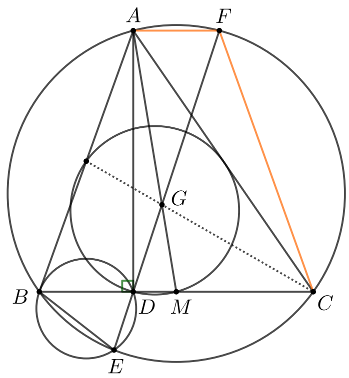
adică $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}<k\sqrt{\dfrac{2(x+1)^2}{x+2}}$, sau $\sqrt{\dfrac{x+2}{2(x+1)}}\left(2+\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}\right)<k$.

Cum $\sqrt{\dfrac{x+2}{2(x+1)}}<1$, este suficient să găsim x pentru care $2+\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}<k$, adică $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}<k-2$, sau, echivalent, $\dfrac{2x}{x+1}<(k-2)^2$. Notând $t=(k-2)^2>0$, condiţia de mai sus este îndeplinită de orice $x>0$ dacă $t\geq 2$, iar dacă $t<2$ ea revine la $x<\dfrac{t}{2-t}$. Deoarece $\dfrac{t}{2-t}>0$, există numere x,y,z care satisfac condiţiile din enunţ.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB<AC$, G centrul său de greutate şi D piciorul înălţimii din A. Dreapta DG intersectează arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului ABC în punctul E. Arătaţi că dreapta AB este tangentă cercului circumscris triunghiului BDE.

Soluţie: Fie F celălalt punct de intersecţie a dreptei DG cu cercul circumscris triunghiului ABC. Concluzia este echivalentă cu $\angle BEF\equiv\angle ABC$, deci cu congruenţa arcelor AC şi BF, ceea ce revine la congruenţa arcelor AB şi FC, deci la $AF\parallel BC$ (cu alte cuvinte la $ABCF$ trapez isoscel). Se ştie că omotetia de centru G şi raport

$-1/2$ duce cercul circumscris în cercul lui Euler. Cum D se află pe cercul lui Euler, iar F pe cercul circumscris, iar punctele D, G şi F sunt coliniare, omotetia de mai sus duce punctul F în punctul D. Dar o omotetie duce un segment într-unul paralel cu acesta, deci ea duce segmentul $[AF]$ în segmentul $[MD]$ (M este mijlocul laturii $[BC]$). Rezultă că $AF \parallel MD$, deci $AFCB$ este un trapez inscriptibil, adică unul isoscel, de unde concluzia.



Altă finalizare: (*Mircea Fianu*)
Fie H ortocentrul triunghiului şi N şi P simetricele lui H faţă de D, respectiv M. Se ştie că ambele puncte se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, P fiind diametral opusul lui A. Dacă Q este intersecţia perpendicularei din P pe BC cu cercul circumscris lui ABC, atunci $ANPQ$ este dreptunghi, deci $AQ \parallel NP \parallel DM$ şi $AQ = NP = 2DM$. Aşadar $\angle QAG \equiv \angle GMD$ şi $\dfrac{AQ}{DM} = 2 = \dfrac{AG}{GM}$, deci triunghiurile QAG şi DMG sunt asemenea, deci D, G, Q sunt coliniare. Rezultă că $Q = F$, de unde concluzia.

Problema 4. În n cutii transparente se introduc bile roşii şi bile albastre. Trebuie alese 50 de cutii astfel încât ele să conţină împreună cel puţin jumătate din bilele roşii şi cel puţin jumătate din bilele albastre. Este întotdeauna posibilă o asemenea alegere indiferent de numărul bilelor şi de modul în care au fost distribuite în cutii dacă:
a) $n = 100$;
b) $n = 99$?

Soluţie:
a) La 100 cutii: în 25 de cutii pun câte o bilă roşie, iar în celelalte 75 câte o bilă albastră. Pentru a alege cel puţin jumătate din bilele roşii trebuie alese 13 cutii care conţin bile roşii, iar pentru a alege cel puţin jumătate din bilele albastre, trebuie să alegem cel puţin 38 de cutii care conţin bile albstre, deci cel puţin 51 de cutii în total. Prin urmare, dacă avem 100 de cutii, este posibil să nu putem alege 50 care

să conţină cel puţin jumătate din totalul bilelor de fiecare culoare.
1 si 75 cu cate o bila de culoarea 2. trebuie alese cel putin 13 din primele si 38 din urmatoarele, adica 51.
b) Demonstrăm prin inducţie că dacă avem $2n+1$ cutii, atunci putem alege $n+1$ dintre ele astfel încât să avem cel puţin jumătate din bilele de fiecare culoare.
Pentru $n = 1$: dacă n-am putea alege două cutii, atunci cea care rămâne are majoritatea bilelor roşii sau majoritatea bilelor albastre. Dar există cel mult câte o asemenea alegere pentru fiecare culoare şi 3 cutii disponibile, deci există cel puţin o cutie care nu are nici majoritatea roşiilor, nici majoritatea albastrelor. Alegând celelalte două cutii, deţinem cel puţin jumătate din bilele din fiecare culoare.
Pasul de inducţie. Spunem că două cutii sunt comparabile dacă una din ele are cel puţin la fel de multe bile din fiecare cuiloare ca cealaltă. Daca există două cutii comparabile, le eliminăm şi aplicăm ipoteza de inducţie celor $2n-1$ cutii rămase, apoi completăm cele n cutii alese cu cutia mai mare dintre cele două comparabile. Dacă nicicare două cutii nu sunt comparabile, notăm cu a_i, b_i numărul de bile roşii, respectiv albastre din cutia i. Reordonând eventual cutiile, o să avem $a_1 > a_2 > \ldots > a_{99}$ şi $b_1 < b_2 < \ldots < b_{99}$. Alegem cutiile de rang impar. Acestea conţin împreună cel puţin jumătate din bilele din fiecare culoare.