



# CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



ETAPA NAȚIONALĂ  
24 mai 2024

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

## Subiecte

Clasa a IX-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

**Subiectul 1. a)** Fie  $m \in \mathbb{Z}$  și funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx - m(m+1)$ . Aflați valorile numărului întreg  $m$ , pentru care mulțimea  $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) : 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}$  are exact două elemente.

**b)** Fie  $x$  și  $y$  numere reale astfel încât  $x^2 - xy - y^2 = 1$ . Determinați minimul și maximul expresiei  $\frac{y-2}{x}$ .

**Subiectul 2. a)** Fie  $x$  și  $y$  numere reale pozitive care satisfac relația  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ .

Demonstrați inegalitatea:  $(x+y)^3 - x^3 - y^3 \geq 48$ .

**b)** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir neconstant cu proprietatea  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$  pentru  $(\forall) n \geq 1$ .

Să se arate că șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $b_n = \frac{a_n}{n}$  este o progresie aritmetică.

## Subiectul 3.

**a)** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul  $H$ . Dacă pentru orice punct  $M$  din planul triunghiului există relația  $3\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ , demonstrați că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

**b)** În pătratul  $ABCD$ , bisectoarea unghiului  $\angle ACB$  intersectează latura  $AB$  în  $E$  și diagonala  $BD$  în  $M$ . Perpendiculara în  $M$  pe  $CE$  intersectează diagonala  $AC$  în punctul  $X$  și latura  $AD$  în punctul  $Y$ , iar mediatoarea segmentului  $CE$  intersectează pe  $AC$  în punctul  $Z$ . Demonstrați că  $\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{ZY}$

**Subiectul 4.** Jack London povestește cum a călătorit din Skagway (oraș din Alaska) într-o sanie trasă de 5 câini husky, pentru a ajunge la tabăra unde un camarad era pe moarte. Timp de 24 de ore, câinii husky au tras sania cu viteză maximă. Apoi 2 câini au fugit cu o haită de lupi. Sania lui Jack London, rămasă cu 3 câini, a încetinit proporțional. A ajuns la tabără cu 48 de ore mai târziu decât și-a planificat. Dacă cei doi câini husky fugari ar mai fi rămas înhămați pentru încă 50 de mile, scrie Jack London, ar fi întârziat cu numai 24 de ore. La ce depărtare de Skagway era tabăra?