

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 16 februarie 2013

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat. Să se determine, după toate numerele a_1, a_2, \dots, a_n reale pozitive,

$$\text{valoarea minimă a sumei } S = \left\lfloor \frac{a_1 + a_2}{a_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2 + a_3}{a_4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n + a_1}{a_2} \right\rfloor.$$

Marius Marchitan, Suceava

Soluție.

Cum $\lfloor x \rfloor > x - 1$, pentru orice x număr real, deducem că:

$$\begin{aligned} S &> \frac{a_1 + a_2}{a_3} - 1 + \frac{a_2 + a_3}{a_4} - 1 + \dots + \frac{a_n + a_1}{a_2} - 1 = \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_2} \right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_1}{a_2} \right) - n \geq \\ &\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_2}} + n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_1}{a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_2}} - n = n + n - n = n. \end{aligned}$$

Rezultă că $S > n$ și cum S este număr natural, deducem că $S \geq n + 1$. Pentru a arăta că valoarea minimă a sumei S este $n + 1$, rămâne să găsim un exemplu de numere a_1, a_2, \dots, a_n reale pozitive pentru care $S = n + 1$.

Fie $a_1 = n^2 - (2n - 3)$, iar următoarele $n - 1$ numere le luăm consecutive:

$a_2 = n^2 - (n - 2), a_3 = n^2 - (n - 3), \dots, a_{n-1} = n^2 - 1, a_n = n^2$. În continuare avem:

$$\left\lfloor \frac{a_1 + a_2}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 - (2n - 3) + n^2 - (n - 2)}{n^2 - (n - 3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^2 - 3n + 5}{n^2 - n + 3} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2 - n + 3} \right\rfloor = 1.$$

Pentru orice $k = \overline{2, n - 2}$:

$$\left\lfloor \frac{a_k + a_{k+1}}{a_{k+2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 - (n - k) + n^2 - (n - k - 1)}{n^2 - (n - k - 2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^2 - 2n + 2k + 1}{n^2 - n + k + 2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{n^2 - n + k - 1}{n^2 - n + k + 2} \right\rfloor = 1.$$

Pentru penultimul termen al sumei găsim:

$$\left\lfloor \frac{a_{n-1} + a_n}{a_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 - 1 + n^2}{n^2 - (2n - 3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^2 - 1}{n^2 - 2n + 3} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{4n - 7}{n^2 - 2n + 3} \right\rfloor = 2,$$

deoarece $4n - 7 \geq 0$ și $4n - 7 < n^2 - 2n + 3 \Leftrightarrow 0 < (n - 3)^2 + 1$. Ultimul termen al lui S este:

$$\left\lfloor \frac{a_n + a_1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 + n^2 - (2n - 3)}{n^2 - (n - 2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^2 - 2n + 3}{n^2 - n + 2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n + 2} \right\rfloor = 1.$$

Centralizând, găsim că $S = n + 1$, aceasta reprezentând valoarea minimă a sumei S .

Barem.

Enunță inegalitatea $\lfloor x \rfloor > x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$	1 p
Deduce $S > \frac{a_1 + a_2}{a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n + a_1}{a_2} - n$	1 p
Obține $S > n$	2 p
Deduce $S \geq n + 1$	1 p
Justifică printr-un exemplu că valoarea minimă a lui S este $n + 1$	2 p

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară și crescătoare astfel încât $|f(x)| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că $f^3(x) + f^3(y) \geq xy(f(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \geq 0$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție Folosind formula $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$ deducem că inegalitatea din enunț se scrie astfel:

$$(f(x) + f(y))(f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y)) \geq xy(f(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ cu } x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + f(y))(f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y) - xy) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ cu } x + y \geq 0.$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y \geq 0$. Deoarece funcția f este impară și crescătoare $\Rightarrow f(x) \geq f(-y) = -f(y) \Rightarrow f(x) + f(y) \geq 0$ (1).

Cum $|f(x)| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^2(x) \geq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ și

$$2(f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y) - xy) = (f(x) - f(y))^2 + f^2(x) + f^2(y) - 2xy \geq$$

$$f^2(x) + f^2(y) - 2xy \geq x^2 + y^2 - 2xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y) - xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț.

Barem.

Rescrie inegalitatea cerută $(f(x) + f(y))(f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y) - xy) \geq 0$	2 p
Deduce $f(x) + f(y) \geq 0$ pentru $x, y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$	2 p
$ f(x) \geq x , (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^2(x) \geq x^2, (\forall)x \in \mathbb{R}$	1 p
Demonstrează $f^2(x) + f^2(y) - f(x)f(y) - xy \geq 0, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$	2 p

3. Se consideră numerele complexe z_1 și $z_2, z_2 \neq 0$. Știind că $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$, să se studieze monotonia

$$\text{funcției } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|z_1|^x + |z_2|^x}{|z_1 - z_2|^x}.$$

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Dacă $z_1 = 0$ atunci funcția f este constantă. Fie $z_1 \neq 0$.

$$Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \text{ echivalează cu } \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2}{|z_2|^2} = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0.$$

$$\text{Apoi } |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

$$\text{Deducem că } \frac{|z_1|}{|z_1 - z_2|}, \frac{|z_2|}{|z_1 - z_2|} \in (0, 1).$$

$$\text{Atunci avem } f(x) = \frac{|z_1|^x + |z_2|^x}{|z_1 - z_2|^x} = \left(\frac{|z_1|}{|z_1 - z_2|}\right)^x + \left(\frac{|z_2|}{|z_1 - z_2|}\right)^x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ de unde rezultă că funcția } f \text{ este strict}$$

descrescătoare, fiind o sumă de funcții strict descrescătoare. În concluzie, f este funcție descrescătoare pentru orice numerele complexe z_1 și $z_2, z_2 \neq 0$.

Barem.

Consideră cazul $z_1 = 0$	1 p
Deduce $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$	1 p
Demonstrează $ z_1 - z_2 ^2 = z_1 ^2 + z_2 ^2$	2 p
Deduce $\frac{ z_1 }{ z_1 - z_2 }, \frac{ z_2 }{ z_1 - z_2 } \in (0, 1)$ dacă $z_1 \neq 0$	1 p
Finalizare f este funcție descrescătoare	2p

4. Fie triunghiul ΔABC . În raport cu un reper cartezian cu originea în centrul cercului circumscris ΔABC , vârfurile A, B, C au afixele a, b respectiv c . Dacă ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are o rădăcină de modul unu, demonstrați că ΔABC este isoscel.

Anca Andrei, Suceava

Soluție. Din alegerea reperului rezultă că $|a|=|b|=|c|>0$. Fie z_1, z_2 , rădăcinile ecuației și presupunem că

$$|z_1|=1. \text{ Dar } z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow |z_2|=1 \text{ și } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow |z_1 + z_2|=1 \Rightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Rightarrow (z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = 1 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2 \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b^2 - ba = ac - ba$$

$$\Rightarrow b(b-a) = a(c-b) \Rightarrow |b| \cdot |b-a| = |a| \cdot |c-b| \Rightarrow |b-a| = |c-b| \Rightarrow$$

$$[AB] \equiv [BC] \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel.}$$

Barem.

Scrie $ a = b = c >0$	1 p
Arată că ambele rădăcini au modul 1	1 p
Demonstrează că $b^2 = ac$	3 p
Finalizare $ b-a = c-b \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel	2 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

16 februarie 2013

CLASA a X-a

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat. Să se determine, după toate numerele a_1, a_2, \dots, a_n reale pozitive, valoarea minimă a sumei $S = \left[\frac{a_1 + a_2}{a_3} \right] + \left[\frac{a_2 + a_3}{a_4} \right] + \dots + \left[\frac{a_n + a_1}{a_2} \right]$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară și crescătoare astfel încât $|f(x)| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Demonstrați că $f^3(x) + f^3(y) \geq xy(f(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \geq 0$.

3. Se consideră numerele complexe z_1 și $z_2, z_2 \neq 0$. Știind că $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$, să se studieze monotonia funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|z_1|^x + |z_2|^x}{|z_1 - z_2|^x}$.

4. Fie triunghiul $\triangle ABC$. În raport cu un reper cartezian cu originea în centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, vârfurile A, B, C au afizele a, b respectiv c . Dacă ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are o rădăcină de modul unu, demonstrați că $\triangle ABC$ este isoscel.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.