OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A VI-A

1.) Produsul a trei numere impare consecutive este o cincime din numărul de şase cifre $\overline{ABABAB}$. Aflaţi valorile cifrelor *A* şi *B*.

2.) Fie $A=\frac{6}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12}{3}\cdot\frac{15}{4}\cdot...\cdot\frac{5961}{1986}\cdot\frac{5964}{1987}\cdot\frac{5967}{1988}\cdot\frac{1}{1989}$. Să se aducă la forma cea mai simplă numărul *A* şi să se precizeze ultima cifră a lui.

3.) Unghiul format de bisectoarele unghiurilor adiacente $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ are măsura de 115°.

a) Să se determine $m(\widehat{AOC})$.

b) Dacă semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\widehat{AOC}$ formează cu $[OB$ un unghi cu măsura de 57° şi $m(\widehat{AOB})>m(\widehat{BOC})$, să se determine $m(\widehat{AOB})$ şi $m(\widehat{BOC})$.

4.) Se dau punctele coliniare A, B, C, D distincte, în această ordine, astfel încât $\frac{BC}{5}=\frac{CD}{3}$ şi $BD=16$ cm.

a) Să se afle lungimile segmentelor BC şi CD.

b) Dacă P este mijlocul segmentului AD şi $P\in(BC)$, aflaţi valoarea în cm (exprimat cu număr natural) a lungimii segmentului AD, pentru care segmentele AD, BC şi PD pot fi laturile unui triunghi.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

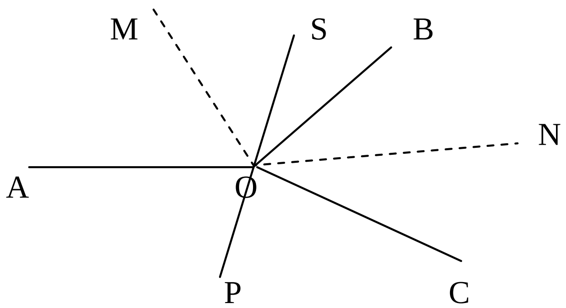
30 ianuarie 2016

BAREM

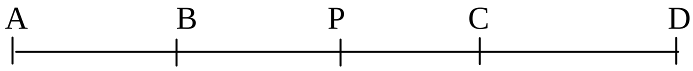
CLASA A VI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Deoarece produsul a trei numere impare consecutive este o cincime din numărul $\overline{ABABAB}$, rezultă că $\overline{ABABAB}$ este de 5 ori produsul celor trei numere impare consecutive, de unde rezultă că $\overline{ABABAB}$ este divizibil cu 5 şi $\overline{ABABAB}$ este număr impar. Deci, $B=5$.	**2p**
	$\overline{A5A5A5}=\overline{A5}\cdot 10000+\overline{A5}\cdot 100+\overline{A5}=\overline{A5}\cdot 10101$	**1p**
	$10101=3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$ $\overline{A5A5A5}=\overline{A5}\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$	**2p**
	Deoarece $\overline{A5A5A5}=\overline{A5}\cdot 7\cdot 3\cdot 13\cdot 37=(10A+5)\cdot 7\cdot 3\cdot 13\cdot 37=5\cdot(2A+1)\cdot 7\cdot 37\cdot 3\cdot 13$ este de 5 ori produsul a trei numere impare consecutive, rezultă că $(2A+1)\cdot 7\cdot 37\cdot 3\cdot 13$ este produsul a trei numere impare consecutive. Unul dintre cele trei numere impare consecutive este divizibil cu 37. Dacă acel număr ar fi $37\cdot 3=111$ atunci celelalte două ar fi mai mari decât 100, iar produsul celor trei numere ar fi mai mare decât 1000000, ceea ce nu este posibil. Deci unul dintre cele trei numere impare consecutive este 37. Al doilea număr este divizibil cu 13, deci poate fi numai 39, care este egal cu $3\cdot 13$. Al treilea număr este divizibil cu 7, deci poate fi numai 35. Atunci $(2A+1)\cdot 7=35\Rightarrow 2A+1=5\Rightarrow A=2$.	**4p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$A=\frac{6}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{5964}{1987}\cdot\frac{5967}{1988}\cdot\frac{1}{1989}=\frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{3\cdot 4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3\cdot 1988}{1987}\cdot\frac{3\cdot 1989}{1988}\cdot\frac{1}{1989}$	**3p**
	$A=\frac{3^{1988}\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1988\cdot 1989}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1987\cdot 1988\cdot 1989}$	**2p**
	$A=3^{1988}$	**2p**
	$A=3^{1988}=\left(3^4\right)^{497}=81^{497}$ Ultima cifră a numărului 81^{497} este 1, deci ultima cifră a numărului A este 1.	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen  	**1p**

	a) Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ şi $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$. Atunci $m(\widehat{MON})=115^\circ$. $m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})=2\cdot m(\widehat{MOB})+2\cdot m(\widehat{BON})=2\cdot\left(m(\widehat{MOB})+m(\widehat{BON})\right)=$ $=2\cdot m(\widehat{MON})=2\cdot 115^\circ=230^\circ>180^\circ$ $m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})+m(\widehat{AOC})=360^\circ$ (unghiuri formate în jurul unui punct) $m(\widehat{AOC})=360^\circ-230^\circ=130^\circ$	**3p**
	b) Fie $[OP$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ şi $[OS$ semidreapta opusă semidreptei $[OP$. $m(\widehat{AOP})=m(\widehat{POC})=\dfrac{m(\widehat{AOC})}{2}=65^\circ$ $m(\widehat{AOS})=180^\circ-m(\widehat{AOP})=115^\circ$	**2p**
	$m(\widehat{AOB})>m(\widehat{BOC})$ şi $m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})=230^\circ\Rightarrow m(\widehat{AOB})>\dfrac{230^\circ}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{AOB})>115^\circ$, şi cum $m(\widehat{AOS})=115^\circ$, iar $S\in[AO;B$, rezultă că $S\in Int\,\widehat{AOB}$. $m(\widehat{AOB})=m(\widehat{AOS})+m(\widehat{SOB})=115^\circ+57^\circ=172^\circ$ $m(\widehat{BOC})=230^\circ-m(\widehat{AOB})=58^\circ$	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	 Fie $\dfrac{BC}{5}=\dfrac{CD}{3}=x$, atunci $BC=5x$ şi $CD=3x$. $BD=BC+CD=8x$. $8x=16\Rightarrow x=2$ $BC=5\cdot 2=10$ (cm) şi $CD=3\cdot 2=6$ (cm)	**3p**
	$AD=2PD$ $B\in(AD)\Rightarrow AD>BD\Rightarrow AD>16$ cm	**2p**
	AD, BC şi PD sunt laturile unui triunghi, dacă: $AD+BC>PD$, $AD+PD>BC$ şi $PD+BC>AD$. $AD+BC>PD$, pentru că $AD>PD$ şi $BC>0$. $AD+PD>BC$, pentru că $AD>BC$ şi $PD>0$. $PD+BC>AD\Leftrightarrow PD+10>2PD\Leftrightarrow PD<10$, deci a treia condiţie este îndeplinită numai dacă $PD<10$ cm $PD<10$ cm $\Rightarrow AD<20$ cm	**2p**
	$AD>16$ cm $\Rightarrow PD>8$ cm $\Rightarrow PD>CD$, iar din $PD<10$ cm $\Rightarrow PD<BD$, deci este îndeplinită condiţia: $P\in(BC)$ $AD>16$ cm şi $AD<20$ cm $\Rightarrow$ $AD=17$ cm sau $AD=18$ cm sau $AD=19$ cm	**2p**