

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
CLASA A XII-A (M₁ 4 ore)
– ETAPA LOCALĂ –18.02.2016 –

SUBIECTUL I

- a) Fie H_1 și H_2 subgrupuri ale grupului (G, \cdot) . Arătați că $H_1 \cap H_2$ este subgrup al grupului (G, \cdot) .
- b) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, este o funcție bijectivă cu $f^{-1}(1) = 2$, să se determine elementul neutru al legii de compoziție definite prin:

$$x * y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y) - 2), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}$$

SUBIECTUL II

Se dă mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 + 6a & 4a \\ -9a & 1 - 6a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

Se presupune cunoscut faptul că (M, \cdot) este grup.

- a) Arătați că (M, \cdot) este grup comutativ.
- b) Rezolvați ecuația $A((2x - 3)^2) \cdot A(3) = A(2) \cdot A^2(3x - 2)$.
- c) Arătați că (M, \cdot) este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

SUBIECTUL III

Calculați:

- a) $I_1 = \int (\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x) dx$
- b) $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$

SUBIECTUL IV

Să se calculeze $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x\sqrt{2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1+x^2}} dx$

G.M. 5/2012

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.