OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele *a, b, c, d* ştiind că $\dfrac{\overline{abcd}}{8625}=\overline{1,0a6}$.

Costel Anghel, Gazeta Matematică nr. 9/2014

Soluţie şi barem de corectare

Din enunţ rezultă $8\cdot\overline{abcd}=69\cdot\overline{10a6}$ ...... (3p)

$8|\overline{10a6}\Rightarrow a\in\{1,5,9\}$ ...... (1p)

Pentru $a=1$ rezultă $\overline{abcd}=8763$, deci *a* este simultan 1 şi 8, absurd ...... (1p)

Pentru $a=5$ rezultă $\overline{abcd}=9108$, deci *a* este simultan 5 şi 9, absurd ...... (1p)

Pentru $a=9$ rezultă $\overline{abcd}=9453$, care convine, deci $a=9, b=4, c=5, d=3$ ...... (1p)

Problema 2. Împărţind numărul natural nenul *m* pe rând la 7, 8 şi 9 obţinem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărţind numărul natural nenul *n* pe rând la 8 şi 9 obţinem resturile 5, respectiv 7.

Arătaţi că fracţia $\dfrac{m+20}{n+11}$ este reductibilă cu 72.

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$m=7c_1+1$, $m=8c_2+4$, $m=9c_3+7$, unde $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{N}$ ...... (1p)

$7|m+20$, $8|m+20$, $9|m+20$ ...... (1p)

$[7,8,9]|m+20\Rightarrow 504|m+20$, deci numărătorul se divide cu 72 ...... (1p)

$n=8d_1+5$, $n=9d_2+7$, unde $d_1,d_2\in\mathbb{N}$ ...... (1p)

$8|n+11$, $9|n+11$ ...... (1p)

$[8,9]|n+11\Rightarrow 72|n+11$, deci şi numărătorul se divide cu 72 ...... (1p)

Ca urmare, fracţia $\dfrac{m+20}{n+11}$ este reductibilă cu 72 ...... (1p)

Problema 3. Arătaţi că numărul $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{2039}$ este divizibil cu 2015.

Daniel Cojocaru, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

Cum $2015=5\cdot13\cdot31$, vom arăta că *A* este divizibil cu fiecare din numerele 5, 13, 31 ...... (1p)

Cum *A* are 2040 de termeni, ei se pot grupa câte 4, deoarece $4|2040$; rezultă

$$A=(1+2+2^2+2^3)+2^4(1+2+2^2+2^3)+...+2^{2036}(1+2+2^2+2^3)$$

şi, cum $1+2+2^2+2^3=15=5\cdot3$, rezultă că $5|A$ ...... (2p)

Grupând termenii câte 5 (este posibil, deoarece $5|2040$), rezultă

$$A=(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5(1+2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2035}(1+2+2^2+2^3+2^4)$$

şi, cum $1+2+2^2+2^3+2^4=31$, rezultă că $31|A$ ...... (2p)

Grupând termenii câte 12 (la fel, este posibil, deoarece $12|2040$) , rezultă

$$A=(1+2+2^2+...+2^{11})+2^{12}(1+2+2^2+...+2^{11})+...+2^{2028}(1+2+2^2+...+2^{11})$$

şi, cum $1+2+2^2+...+2^{11}=4095=13\cdot 315$, rezultă că $31|A$ .... (2p)

Problema 4. Se consideră punctele coliniare $M_1,M_2,M_3,...,M_{2015}$ în această ordine, astfel încât $M_1M_2=2$ cm, $M_2M_3=2M_1M_2$, $M_3M_4=2M_2M_3$, …, $M_{2014}M_{2015}=2M_{2013}M_{2014}$.

a) Calculaţi lungimea segmentului $[M_1M_{200}]$.

b) Comparaţi lungimile segmentelor $[M_1M_{200}]$ şi $[M_{200}M_{300}]$.

c) Demonstraţi că pentru orice numere naturale *a, b, c, d,* cu $1\le a<b\le c<d\le 2015$, segmentele $[M_aM_b]$ şi $[M_cM_d]$ au lungimi diferite.

Dorin Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $M_2M_3=2^2$, $M_3M_4=2^3$, $M_{2014}M_{2015}=2^{2014}$ .... (1p)

$M_1M_{200}=2^{100}-2$ .... (1p)

b) $M_{200}M_{300}=2^{300}-2^{200}$ .... (1p)

$2^{200}-2<2^{300}-2^{200}\Rightarrow M_1M_{200}<M_{200}M_{300}$ .... (1p)

c) Presupunând că există numerele naturale *a, b, c, d,* cu $1\le a<b\le c<d\le 2015$ astfel încât

$M_aM_b=M_cM_d$, rezultă $2^b-2^a=2^d-2^c$ .... (1p)

Împărţind prin 2^a rezultă $2^{b-a}-1=2^{d-a}-2^{c-a}$, imposibil, deoarece membrul stâng este un număr impar, iar membrul drept este număr par, deci presupunerea făcută este falsă .... (2p)