MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ
2014. február 23.
IX. OSZTÁLY
(4 órás program)

1.) Határozzuk meg az $a_1, a_2, ..., a_n$ szigorúan pozitív valós számokat tudva azt, hogy:

$$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ... + a_n^{\,2} = a_1 + a_2 + ... + a_n + \frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2.) Legyenek $a_1, a_2, ..., a_{12}$ egy pozitív tagú, növekvő mértani haladvány tagjai. Igazoljuk, hogy: $a_{12} - a_1 > 11(a_7 - a_6)$

3.) Az a,b és c egy háromszög oldalainak a hosszát jelőli. Határozd meg a $c^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\cdot x + b^2 = 0$ egyenlet valós megoldásainak halmazát!

4.) Az $ABCD$ konvex négyszögben M és N a (BC) illetve (CD) oldal felezőpontja. Az AM és BN egyenesek metszéspontját P-vel jelöljük és tudjuk, hogy $\frac{PA}{PM} = k$ és $\frac{BP}{PN} = \frac{k}{k+2}$.

a.) Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ trapéz.

b.) Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy $ABCD$ paralelogramma legyen.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.
Minden feladat 10 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.	**Din oficiu**	**1p**
	Vom folosi inducţia matematică: n=1 $a_1^2 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1$ n=2 $a_1^2 + a_2^2 = a_1 + a_2 + 2 \Rightarrow a_2^2 - a_2 - 2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2$	**3p**
	Presupunem adevărat pentru un *k*-fixat: $a_k = k$	**1p**
	$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + a^2_{k+1} = 1 + 2 + ... + k + a_{k+1} + \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$	
	$\Rightarrow a^2_{k+1} - a_{k+1} - k(k+1) = 0 \Rightarrow$	**3p**
	$\Rightarrow a_{k+1} = k+1 \Rightarrow a_n = n, \forall n \geq 1$	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	Din condiţiile iniţiale: $a_n = a_1 r^{n-1}$, unde a_1>0, r>1	**3p**
	$a_{12} - a_1 > 11(a_7 - a_6) \Leftrightarrow a_1(r^{11} - 1) > 11 a_1 r^5 (r-1) \Leftrightarrow r^{10} + ... + r + 1 > 11r^5$	**3p**
	Folosind inegalitatea mediilor și faptul că r>1, avem: $r^{10} + ... + r + 1 > 11\sqrt[11]{r^{1+2+...+10}} = 11\sqrt[11]{r^{11\cdot 5}} = 11r^5$	**3p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	a,b şi *c* fiind laturile unui triunghi avem: a,b,c>0, a+b>c, a+c>b şi b+c>a	**2p**
	Calculând discriminantul ecuaţiei, avem: $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$	**3p**
	Cum din cei patru factori doar primul este negativ avem $\Delta < 0$, deci ecuaţia nu are soluţii reale.	**3p**
	$M = \varnothing$	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\overrightarrow{AP} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{BP} = \frac{k}{2k+2}\overrightarrow{BN} = \frac{k}{2k+2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right) = \frac{k}{2k+2}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} = \frac{4k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{CD}}{4k+4} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{k}{4}\overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ este trapez.	**3p**
b.)	Pentru k=4 ABCD este paralelogram.	**2p**