Inspectoratul Şcolar Judeţean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A- XII-A

15 februarie 2015

1. Să se calculeze:

a. $\int \frac{e^{2x}+x^3+5x^2-1}{e^{2x}+3x^3+6x^2-12x+9}dx, x\in(0,\infty)$. (supliment GM);

b. $\int \frac{1}{x^4+x^{10}}dx, x\in(0,\infty)$.(supliment GM).

2. Fie o funcţie bijectivă, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $q\in\mathbf{R}$ cu $f(q)=2$. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$\circ$” prin: $a\circ b=f(f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-q)\forall a,b\in\mathbf{R}$.

a. Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie si simetricul lui $a\in\mathbf{R}$ în raport cu legea „$\circ$”;

b. Pentru $f(x)=x^3$, rezolvaţi ecuaţia: $x^2\circ x=(6-q)^3$. (supliment GM).

3. Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^n x}dx, n\geq 1$.

a. Calculaţi I_1;

b. Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita lui. (Jenică Crînganu).

4. Să se determine morfismele de grupuri de la $(\mathbf{Z}_p,+)$ la $(\mathbf{Z}_p^*,\cdot)$, unde $p\in\mathbf{N}$ este un număr prim.(Constantin Niţă).

Nota :Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele se noteaza cu 7 puncte

Olimpiada de matematică – faza locală
Barem de corectare , clasa a XII-a

1.

a) Fie $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}, u(x)=e^{2x}+3x^3+6x^2-12x+9$.. 1p

$\int\frac{e^{2x}+x^3+5x^2-1}{e^{2x}+3x^3+6x^2-12x+9}dx=\frac{1}{3}\int\frac{u(x)+u'(x)}{u(x)}dx$.. 2p

Finalizare.. 1p

b) $\int\frac{1}{x^4+x^{10}}dx=\int\frac{1}{x^{10}(\frac{1}{x^6}+1)}dx, u:(0,\infty)\to\mathbb{R}, u(x)=\frac{1}{x^3}$ 1p

$\int\frac{1}{x^4+x^{10}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{u^2(x)u'(x)}{u^2(x)+1}dx=-\frac{1}{3}(u(x)-\int\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}dx)$.......................................1p

Finalizare..1p

2.

a) Elementul neutru este $e=2$..2p

Simetricul lui $a\in\mathbb{R}$ este $a'=f(2q-f^{-1}(a))$.. 2p

b) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=6$..2p

Finalizare..1p

3.

a) I_1=2..1p

b) Şirul este monoton şi mărginit, deci convergent..2p

$1\le\sqrt{1+sin^n x}\le 1+\frac{1}{2}sin^n x, \forall n\ge 1, \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 2p

Rezultă $\frac{\pi}{2}\le I_n\le\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}J_n$, unde $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n xdx$ este şir care are limita egala cu zero.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\frac{\pi}{2}$ 2p

4.

Fie $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}^*{}_p$ un morfism de grupuri.

Avem $f(\hat{0})=\hat{1}$ și notăm $f(\hat{1})$=$\hat{a}$ 1p

$\hat{1}=f(\hat{0})=f(\hat{p})=f\left(\underbrace{\hat{1}+\cdots\hat{1}}_{p\ ori}\right)=f(\hat{1})f(\hat{1})\ldots f(\hat{1})=\hat{a}^p$.......................................2p

Conform teoremei lui Fermat rezultă că $\hat{a}^p=\hat{a}=\hat{1}$ deci$f(\hat{1})$=$\hat{1}$..................................2p

Fie $\hat{x}\in\mathbb{Z}_p$. Atunci $f(\hat{x})=f\left(\underbrace{\hat{1}+\cdots\hat{1}}_{x\ ori}\right)=(f(\hat{1}))^x=\hat{1}$, deci unicul morfism este morfismul constant $f(\hat{x})=\hat{1}, \forall x\in\mathbb{Z}_p$..2p