OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a IX-a

1. Verificaţi că numărul $7^{20}-1$ este divizibil cu 10^3 şi determinaţi ultimele trei cifre ale numărului 7^{2015}.

Marin Marin

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$[x+2015]-\left[\frac{5x-2015}{2}\right]=\frac{x}{2}+2015,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Ioana Maşca

3. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA}+(c+a)\overrightarrow{PB}+(a+b)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$, unde punctul $P\in\{O,I,G\}$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral. (Notaţiile sunt cele uzuale).

Gazeta Matematică - Supliment cu exerciţii, octombrie 2014.

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\frac{x-a_1}{a_2+...+a_n}+\frac{x-a_2}{a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{x-a_n}{a_1+...+a_{n-1}}=\frac{nx}{a_1+...+a_n},$$

unde $n\geq 2$ şi $a_i>0,\ i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

Florica Zubaşcu-Andreica

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

SOLUŢII - BAREME DE NOTARE

Clasa a IX a

1. *Verificaţi că numărul* $7^{20} - 1$ *este divizibil cu* 10^3 *şi determinaţi ultimele trei cifre ale numărului* 7^{2015}.
Soluţie.
Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm prin $\mathcal{M}n$ un multiplu natural al numărului n. Avem

$$\begin{aligned} 7^5 &= 16807 = \mathcal{M}1000 + 807 \\ 7^{10} &= (7^5)^2 = \mathcal{M}1000 + 807^2 = \mathcal{M}1000 + 651249 = \mathcal{M}1000 + 249 \\ 7^{20} &= (7^{10})^2 = \mathcal{M}1000 + 249^2 = \mathcal{M}1000 + 62001 = \mathcal{M}1000 + 1. \end{aligned}$$

Deci $7^{20} - 1$ este divizibil cu 10^3. **(4p)**
Atunci

$$\begin{aligned} 7^{2015} &= 7^{2000} \cdot 7^{15} = (7^{20})^{100} \cdot (7^5)^3 = (\mathcal{M}1000 + 1)^{100} \cdot (\mathcal{M}1000 + 807)^3 \\ &= (\mathcal{M}1000 + 1) \cdot (\mathcal{M}1000 + 525557943) = (\mathcal{M}1000 + 1) \cdot (\mathcal{M}1000 + 943) = \mathcal{M}1000 + 943, \end{aligned}$$

deci, ultimele trei cifre ale numărului 7^{2015} sunt 943. **(3p)**

2. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia* $[x + 2015] - \left[\frac{5x-2015}{2}\right] = \frac{x}{2} + 2015$, *unde* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* a.
Soluţie.
Dacă $x \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei, atunci $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, deci $x = 2p,\ p \in \mathbb{Z}$. **(2p)**
Atunci, $[x + 2015] = 2p + 2015$, **(2p)**

$$\left[\frac{5x - 2015}{2}\right] = \left[\frac{5 \cdot 2p - 2016 + 1}{2}\right] = \left[5p - 1008 + \frac{1}{2}\right] = 5p - 1008. \qquad \textbf{(2p)}$$

Înlocuind în ecuaţie, obţinem $p = 252$, deci $x = 504$. **1p**

3. *Fie* ABC *un triunghi în care* $(b + c)\overrightarrow{PA} + (c + a)\overrightarrow{PB} + (a + b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, *unde punctul* $P \in \{O, I, G\}$. *Demonstraţi că triunghiul* ABC *este echilateral. (Notaţiile sunt cele uzuale).*
Soluţie.
Pentru un punct arbitrar P din planul triunghiului ABC au loc relaţiile cunoscute (nu se cer demonstraţii):

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}, \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{PA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{PB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PI}. \qquad \textbf{(1p)}$$

Fie P un punct din planul triunghiului ABC cu proprietatea $(b + c)\overrightarrow{PA} + (c + a)\overrightarrow{PB} + (a + b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, echivalentă cu

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{PA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{PB} + \frac{c}{a+b+c}. \qquad \textbf{(1p)}$$

Conform relaţiile cunoscute menţionate anterior, ultima relaţie se transcrie:

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PI}. \qquad \textbf{(1p)}$$

1) Pentru $P = O$, avem $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI}$. Dar $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$. Atunci $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OI}$. Rezultă $H = I$, deci triunghiul ABC este echilateral. **(1p)**

2) Pentru $P = I$, avem $3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{0}$. Rezultă $I = G$, deci triunghiul ABC este echilateral. **(1p)**
3) Pentru $P = G$, avem $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{GI}$. Rezultă $I = G$, deci triunghiul ABC este echilateral. **(1p)**

4. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$\frac{x-a_1}{a_2+...+a_n} + \frac{x-a_2}{a_1+a_3+...+a_n} + ... + \frac{x-a_n}{a_1+...+a_{n-1}} = \frac{nx}{a_1+...+a_n},$$

unde $n \geq 2$ *şi* $a_i > 0,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Soluţie.
Notăm $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Ecuaţia se transcrie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x-a_i}{s-a_i} = \frac{nx}{s}$$

sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} - \frac{n}{s}\right) x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i}. \quad \textbf{(1p)}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} = s \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{s-a_i} - \frac{1}{s}\right) = s\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} - \frac{n}{s}\right),$$

deci ecuaţia devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} - \frac{n}{s}\right) x = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} - \frac{n}{s}\right) s. \quad \textbf{(2p)}$$

Din inegalitatea dintre media aritmetică şi şi media armonică, obţinem

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} (s-a_i)}{n},$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} (s-a_i)} = \frac{n^2}{(n-1)s} > \frac{n}{s}, \text{ deci } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} - \frac{n}{s} \neq 0. \quad \textbf{(3p)}$$

Rezultă că ecuaţia are soluţia unică $x = s$, adică $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. **(1p)**