Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 1

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

**1.** Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia:
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

**2.** Să se determine numerele reale $x$ şi $y$ care satisfac egalitatea
$$3^y\cdot 5^x-2\cdot 5^{2x}+3^{y+1}=\sqrt{3^y\left(2\cdot 5^x-3^y\right)-25^x}+3^{y+2}-2\cdot 5^{x+1}+4$$

**3.** Să se determine valoarea parametrului $\alpha\in[0,2\pi]$, astfel încât numerele A, B şi C să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice
$$A=12^{\log_4\left(\sin\frac{99\pi}{4}\right)},\quad B=-6^{-\log_{25}5}\cdot\cos\left(\frac{99\pi}{4}\right),$$
$$C=\frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-1}{\sqrt[4]{108}}$$

**4.** Se consideră numerele complexe $z_1, z_2, z_3$, pentru care avem $z_1+z_2+z_3\neq 0,\quad z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ şi $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Să se calculeze valoarea $T=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

**5.** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ pentru care
$$2^{f(x)}+f(x)=2^x,\quad \forall x\in(0,\infty)$$
a) Să se demonstreze că funcţia $f$ este bijectivă
b) Să se demonstreze că ecuaţia $f(f(x))=x$ nu are soluţie pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$

András Ibolya

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 2

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

**1.** Dacă numerele nenule $b_1,b_2,\dots,b_n$ sunt termenii unei progresii geometrice şi $S_1=b_1+b_2+\dots+b_n$, iar $S_2=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\dots+\frac{1}{b_n}$ să se calculeze în funcţie de $S_1$ şi $S_2$ produsul $P=b_1\cdot b_2\cdot\dots\cdot b_n$

**2.** Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ ecuaţia
$$\sum_{k=1}^{n}\log_{\sqrt[k+1]{a}}x^k=n(n+1)(n+2)$$

**3.** Se consideră numerele reale $x, y, z$, cu proprietăţile:
$$\cos x+\cos y+\cos z=0 \text{ şi } \sin x+\sin y+\sin z=0.$$
Să se arate că:
$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0 \text{ şi } \sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$$

**4.** Să se calculeze $S=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$

**5**. Să se determine funcţiile *f* şi *g* ştiind că verifică următoarele relaţii:
$$2f(x+6)+4g(2x+15)=x+2 \quad \text{şi} \quad f\left(\frac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=x+4,$$
pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Popa Ionela, Popa Cristian, L.T. Salamon Ernő Gheorgheni