OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A V-A, SUBIECTE

1. Se consideră şirul 10, 13, 16, 19, …. Calculaţi al 2016-lea termen al şirului.

***

2. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care împărţite la $\overline{bc}$ dau câtul şi restul egale cu 18.

Daniela Cerchez, Brăila

3. ***a)*** Scrieţi numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.

b) Scrieţi numărul 100^{2017} ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Mazalu Ionuţ, Brăila

4. Vom numi o submulţime M cu trei elemente a mulţimii $A=\{1,2,3,...,10\}$ de "**tip *Z***" dacă produsul elementelor mulţimii M are ultima cifră 0. Determinaţi numărul submulţimilor lui A de "**tip *Z***".

Daniela şi Nicolae Stănică, G.M.

***Notă*: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de două ore.**
2. Listele cu elevii calificaţi la etapa judeţeană şi baremele vor fi afişate la avizierul unităţilor şcolare şi pe site-ul matematicabr.weebly.com.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A V-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră şirul 10, 13, 16, 19, …. Calculaţi al 2016-lea termen al şirului.

***

Soluţie.

$a_1 = 10 = 3\cdot 3 + 1, a_2 = 13 = 3\cdot 4 + 1,\ a_3 = 16 = 3\cdot 5 + 1, a_4 = 19 = 3\cdot 6 + 1$ 4p

$a_{2016} = 3\cdot(2016 + 2) + 1 = 6055$ 3p

2. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care împărţite la $\overline{bc}$ dau câtul şi restul egale cu 18.

Daniela Cerchez, Brăila

Soluţie.

$100a + \overline{bc} = 18\overline{bc} + 18 \Rightarrow 100a = 17\overline{bc} + 18$ ……………………………………..………….. 1p

$U\left(17\overline{bc} + 18\right) = U\left(100a\right) = 0 \Rightarrow c = 6$ ………………………………………………..…………2p

Avem $17b + 12 = 10a \Rightarrow U\left(17b + 12\right) = U\left(10a\right) = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8$ ………...………..…….…3p

În concluzie, $\overline{abc} = 846$ ………………………………………………………………..…... 1p

3. ***a)*** Scrieţi numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.

b) Scrieţi numărul 100^{2017} ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Mazalu Ionuţ, Brăila

Soluţie.

a) $100 = 1 + 8 + 27 + 64 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ …………………………………………………..…...3p

b) $100^{2017}=100\cdot100^{2016}=\left(1^3+2^3+3^3+4^3\right)\cdot100^{2016}$ …………………………………..…….. 2p

$100^{2017}=\left(100^{672}\right)^3+\left(100^{672}\cdot2\right)^3+\left(100^{672}\cdot3\right)^3+\left(100^{672}\cdot4\right)^3$ ……………………………..……...2p

4. Vom numi o submulţime M cu trei elemente a mulţimii $A=\{1,2,3,...,10\}$ de "**tip *Z***" dacă produsul elementelor mulţimii M are ultima cifră 0. Determinaţi numărul submulţimilor lui A de "**tip *Z***".

Daniela şi Nicolae Stănică, G.M.

Soluţie.

Fie $M=\{a,b,c\}$.

Cazul I: $a=5$ ………………………………………………………………………………. 3p

Produsul elementelor b și c trebuie să fie număr par.

1) Dacă $b=2,$ atunci $c\in\{1,3,4,6,7,8,9,10\}$, adică 8 submulțimi.
2) Dacă $b=4,$ atunci $c\in\{1,3,6,7,8,9,10\}$, adică 7 submulțimi.
3) Dacă $b=6,$ atunci $c\in\{1,3,7,8,9,10\}$, adică 6 submulțimi.
4) Dacă $b=8,$ atunci $c\in\{1,3,7,9,10\}$, adică 5 submulțimi.

În total, pentru acest caz sunt 26 de submulțimi.

Cazul II: $a=10$ ……………………………………………………………………….. 3p

Produsul elementelor b și c poate fi par sau impar. Din cele 36 de submulțimi posibile pentru $a=10,$ eliminăm submulțimile care au fost deja utilizate în cazul I. În comun sunt 4 mulțimi, $\{5,2,10\}$, $\{5,4,10\}$, $\{5,6,10\}$, $\{5,8,10\}$.

În total, pentru acest caz sunt 32 de submulțimi.

Numărul submulțimilor care verifică datele problemei sunt 26 + 32 = 58 submulțimi……1p