

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2015. február 28.

V . OSZTÁLY

- 1.) a) Ha $a+3b=120$ és $4b+4c=160$, számítsd ki a $2a+9b+3c$ összeget!
b) Határozd meg az összes olyan \overline{ab} alakú természetes számot, amely teljesíti az $\overline{ab} = 4a + 3b$ feltételt!
- 2.) Melyek azok a természetes számok, amelyeket 27-tel osztva, a maradék egyenlő a hányados négyzetével?
- 3.) Adott a következő sorozat : 3, 8, 13, 18, ..., melyben minden tag, a másodikkal kezdődően, 5 –tel nagyobb az előzőnél.
a) Határozd meg a sorozat 103-ik tagját!
b) Hányadik tagja a sorozatnak az 1913-as szám?
c) Számítsd ki a sorozat első 150 tagjának összegét!
- 4.) Határozd meg az A , B , C halmazokat úgy, hogy egyidejűleg teljesülnek a következő feltételek: a) $A \cap C = \{2\}$;
b) $A \cap B = \{3\}$;
c) $A \cup B = \{x \mid 2 \leq x < 6\}$;
d) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
e) $A \setminus C = \{3\}$;
f) $B \cap C = \{4\}$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A V-A

1.)	Din oficiu	1p
a)	$4b+4c=160 \Rightarrow b+c=40$	1p
	$2a+9b+3c=2a+6b+3b+3c =$	1p
	$2(a+3b)+3(b+c)=$	1p
	$2 \cdot 120+3 \cdot 40=240+120=360$	1p
b)	$10a + b =4a + 3b$	1p
	$3a = b$	1p
	Aflarea soluțiilor: $a=1, b=3; a=2, b=6; a=3, b=9$	2p
	Aflarea numerelor: 13, 26, 39	1p

2.)	Din oficiu	1p
	Deoarece împărțitorul este 27, rezultă că restul trebuie să fie mai mic decât 27. Deci restul poate să fie 0, 1, 2, ..., 25 sau 26.	1p
	Deoarece restul este egal cu pătratul câtului, iar câtul este un număr natural, rezultă că restul este un pătrat perfect. Dintre numerele 0, 1, 2, ..., 26 pătrate perfecte sunt 0, 1, 4, 9, 16 și 25, deci restul poate fi 0, 1, 4, 9, 16 sau 25.	1p
	Când restul este 0, atunci câtul este 0, pentru că $0^2 = 0$. Atunci numărul căutat este $0 \cdot 27 + 0 = 0$. Când restul este 1, atunci câtul este 1, pentru că $1^2 = 1$. Numărul căutat este $1 \cdot 27 + 1 = 28$. Când restul este 4, atunci câtul este 2, pentru că $2^2 = 4$. Numărul căutat este $2 \cdot 27 + 4 = 58$. Când restul este 9, atunci câtul este 3, pentru că $3^2 = 9$. Numărul căutat este $3 \cdot 27 + 9 = 90$. Când restul este 16, atunci câtul este 4, pentru că $4^2 = 16$. Numărul căutat este $4 \cdot 27 + 16 = 124$. Când restul este 25, atunci câtul este 5, pentru că $5^2 = 25$. Numărul căutat este $5 \cdot 27 + 25 = 160$. Deci, numerele căutate sunt 0, 28, 58, 90, 124, 160.	7p

3.)	Din oficiu	1p
a)	Al 103-lea termen este $5 \cdot 102 + 3 = 513$	3p
b)	$5 \cdot n + 3 = 1913, n = 382$, deci al 383-lea termen	3p
c)	$3 + 8 + \dots + 748 = (3 + 748) \cdot 150 / 2 = 56325$	3p

4.)	Din oficiu	1p
	$A \cup B = \{x \mid 2 \leq x < 6\} = \{2, 3, 4, 5\}$ $1 \in A \cup C \Rightarrow 1 \in A \text{ sau } 1 \in C, \text{ dar } 1 \notin A \cup B \Rightarrow 1 \notin A \text{ și } 1 \notin B. \text{ Deci } 1 \in C.$ $5 \in A \cup B \Rightarrow 5 \in A \text{ sau } 5 \in B, \text{ dar } 5 \notin A \cup C \Rightarrow 5 \notin A \text{ și } 5 \notin C. \text{ Deci } 5 \in B.$ $6 \in A \cup C \Rightarrow 6 \in A \text{ sau } 6 \in C, \text{ dar } 6 \notin A \cup B \Rightarrow 6 \notin A \text{ și } 6 \notin B. \text{ Deci } 6 \in C.$	4p
	$A \cap C = \{2\} \Rightarrow 2 \in A \text{ și } 2 \in C, \text{ dar } 2 \notin A \cap B \Rightarrow 2 \notin B$ $B \cap C = \{4\} \Rightarrow 4 \in B \text{ și } 4 \in C, \text{ dar } 4 \notin A \cap C \Rightarrow 4 \notin A$ $A \cap B = \{3\} \Rightarrow 3 \in A \text{ și } 3 \in B$ $A \setminus C = \{3\} \Rightarrow 3 \notin C$	3p
	Deci $A = \{2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 2, 4, 6\}$	2p