OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

CLASA a XII-a

Problema 1.

Pe mulţimea $G = (0, \infty)$ definim legea de compoziţie:

$x \circ y = 2^{\sqrt[n]{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n - 2^n}}$, $(\forall)\ x, y \in G$, unde $n \geq 3$ este natural impar.

a) Arătaţi că $(G, \circ)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (\log_2 x)^n - 2^n$ este izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2014\ ori} = 4$, în grupul $(G, \circ)$.

Problema 2.

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi f, g două endomorfisme ale grupului G, g injectivă. Arătaţi că grupul G este comutativ în fiecare din următoarele situaţii:

a) $f(x) = g(x^2), (\forall) x \in G.$

b) $f(x) = g(x^{-1}), (\forall) x \in G.$

Problema 3.

Considerăm funcţiile $f, g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\frac{f(x)}{x}$ este o primitivă pentru g şi $\frac{g(x)}{x}$ este o primitivă pentru f.

a) Arătaţi că $f'(x) + g'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(f(x) + g(x)\right), (\forall)\ x > 0.$

b) Determinaţi funcţiile f şi g.

Problema 4.

Determinaţi funcţiile continue $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ şi constanta reală L ştiind că:

a) există $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot f(x) = L$;

b) $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt = 1, (\forall)\ x > 0.$

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

BAREM DE CORECTARE
CLASA a XII-a

Problema 1.

Pe mulţimea $G = (0,\infty)$ definim legea de compoziţie:

$x \circ y = 2^{\sqrt[n]{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n - 2^n}}, (\forall)\ x, y \in G$, unde $n \geq 3$ este natural impar.

a) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că funcţia $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (\log_2 x)^n - 2^n$ este izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2014\ ori} = 4$, în grupul $(G,\circ)$.

Soluţie şi barem:

a) Asociativitate, $(x \circ y) \circ z = 2^{\sqrt[n]{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n + (\log_2 z)^n - 2\cdot 2^n}}$ **1p**

Elementul neutru $e = 4 \in G$ **1p**

Simetricul elementului $x \in G$, $x' = 2^{\sqrt[n]{2\cdot 2^n - (\log_2 x)^n}} \in G$ **1p**

b) f bijectivă **1p**

$f(x \circ y) = f(x) + f(y)\,, (\forall) x, y \in G$ **1p**

c) Egalitatea $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2014\ ori} = 4$ este echivalentă cu $2014 \cdot f(x) = f(4) = 0$ **1p**

$f(x) = 0 \Longrightarrow (\log_2 x)^n - 2^n = 0$, de unde $x = 4$. **1p**

Problema 2.

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi f, g două endomorfisme ale grupului G, g injectivă. Arătaţi că grupul G este comutativ în fiecare din următoarele situaţii:

a) $f(x) = g(x^2), (\forall) x \in G$.

b) $f(x) = g(x^{-1}), (\forall) x \in G$.

Soluţie şi barem:

a) $g((xy)^2) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x^2)g(y^2) = g(x^2y^2)$ **2p**

g injectivă $\Longrightarrow (xy)^2 = x^2y^2, (\forall) x, y \in G$ **1p**

$xyxy = xxyy \Longrightarrow yx = xy, (\forall) x, y \in G \Longrightarrow G$ este comutativ. **1p**

b) $g((xy)^{-1}) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x^{-1})g(y^{-1}) = g(x^{-1}y^{-1})$ **1p**

g injectivă $\Longrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, (\forall) x, y \in G$ **1p**

$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1} = (yx)^{-1} \Longrightarrow yx = xy, (\forall) x, y \in G \Longrightarrow G$ este comutativ **1p**

Problema 3.

Considerăm funcţiile $f, g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\frac{f(x)}{x}$ este o primitivă pentru g şi $\frac{g(x)}{x}$ este o primitivă pentru f.

a) Arătaţi că $f'(x) + g'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \big(f(x) + g(x)\big), (\forall)\ x > 0.$

b) Determinaţi funcţiile f şi g.

Soluţie şi barem:

a) $\begin{cases} \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = g(x) \\ \frac{g'(x) \cdot x - g(x)}{x^2} = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot x = f(x) + x^2 \cdot g(x) \\ g'(x) \cdot x = g(x) + x^2 \cdot f(x) \end{cases}, (\forall)\ x > 0$ **2p**

Adunând relaţiile de mai sus, obţinem egalitatea cerută **1p**

b) Notăm $h = f + g$ şi din punctul a) avem $h'(x) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot h(x) = 0, (\forall)\ x > 0,$

ceea ce este echivalent cu $\left(h(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2} - \ln x}\right)' = 0, (\forall) x > 0$ **1p**

Rezultă $f(x) + g(x) = a \cdot x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, (\forall) x > 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ **1p**

Analog se obţine $f(x) - g(x) = b \cdot x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}, (\forall) x > 0$, unde $b \in \mathbb{R}$ **1p**

Obţinem $f(x) = \frac{x}{2}\left(a \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + b \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right), g(x) = \frac{x}{2}\left(a \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - b \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right), a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Problema 4.

Determinaţi funcţiile continue $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şi constanta reală L ştiind că:

a) există $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot f(x) = L$;

b) $\int_x^{2x} f(t)dt = 1, (\forall)\ x > 0.$

Soluţie şi barem:

Din b) rezultă $F(2x) - F(x) = 1, (\forall)\ x > 0$, unde F este o primitivă a lui f **2p**

$2f(2x) - f(x) = 0$, de unde $f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right), (\forall)\ x > 0$ **2p**

Prin inducţie matematică obţinem $f(x) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right), (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

$L = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x}{2^n} \cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} x \cdot f(x) = xf(x), (\forall)\ x > 0$, de unde

$f(x) = \frac{L}{x}, (\forall)\ x > 0.$ **1p**

Prin înlocuire în b) rezultă $L(\ln 2x - \ln x) = 1, (\forall)\ x > 0$, de unde $L = \frac{1}{\ln 2}$ şi

funcţia $f(x) = \frac{1}{x \ln 2}, (\forall)\ x > 0.$ **1p**