OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Fie G multimea matricilor de forma

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in(-1,1).$$

Demonstrati ca:

a) $A(x)A(y)=A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), \forall x,y\in(-1,1).$

b) G are o structura de grup multiplicativ abelian.

c) $f:G\to\mathbb{R}, f(A(x))=\ln\frac{x+1}{1-x}$ este un izomorfism de la $(G,\cdot)$ la $(\mathbb{R},+)$.

PROBLEMA 2. Fie $(M,\cdot)$ un monoid comutativ finit si e elementul neutru. Fie $A=\{f:M\to M \mid f(xy)=f(x)f(y), \forall x,y\in M\}$. Sa se arate ca daca pentru orice $f\in A$ avem $f(e)=e,$ atunci monoidul este grup.

G.M.11/2012

PROBLEMA 3. Sa se calculeze:

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{dt}{t\sqrt[3]{t+1}+\sqrt[3]{t^2(t+1)^2}+(t+1)\sqrt[3]{t}}.$$

Prof.Gorgota Vasile

PROBLEMA 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie continua si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitiva a sa. Daca

$$f(x)\geq arctg|x|,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R},$$

demonstrati ca exista $x_0\in\mathbb{R}$ astfel incat $F(x_0)=x_0.$

Prof.Anca Andrei

Subiect selectat de prof. Vasile Gorgotă

NOTA: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

Barem clasa a XII-a

Problema 1.

a) Verificarea cerintei. (2p)

b) Verificarea axiomelor grupului.(2p)

c) Verificarea injectivitatii,surjectivitatii si morfismului.(3p)

Problema 2.

(i) $M=\{e\}$ evident $(M,\cdot)$ este grup.(1p)

(ii) $|M|\geq 2$,alegem a oarecare din $M-\{e\}$. $(M,\cdot)$ monoid comutativ finit,obtine $\exists p\in\mathbb{N}$ astfel incat $a^p=a^{2p}$ (2p)

(iii) Considera functia $f:M\to M, f(x)=a^p x$.(1p)

(iv) Arata ca $f\in A$. (2p)

(v) Din $f(e)=e\Rightarrow a^p=e\Rightarrow a$ inversabil,deci monoidul este grup.(1p)

Problema 3.

Folosind factor fortat,amplificarea cu conjugatul ,integrarea si trecerea la limita se obtine $\frac{3}{2}\left(2-\sqrt[3]{4}\right)$.(7p)

Problema 4.

<u>Soluție.</u> Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}|x|$. O primitivă a sa este

$$G(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right), & x\geq 0\\ -x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right), & x<0\end{cases}.$$ Considerăm funcția $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$D(x)=F(x)-G(x)$ care este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $D'(x)=f(x)-g(x)\geq 0,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Prin urmare, funcția D este crescătoare.

Pentru $x<0\Rightarrow D(x)\leq D(0)\Rightarrow F(x)+x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\leq F(0)\Rightarrow$

$F(x)-x\leq F(0)-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x$.

Deoarece

$$\lim_{x\to-\infty}\left(F(0)-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{F(0)}{x}-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}-1\right)=$$

$-\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(F(x)-x\right)=-\infty$. (1)

Pentru $x>0\Rightarrow D(x)\geq D(0)\Rightarrow F(x)-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\geq F(0)\Rightarrow$

$F(x)-x\geq F(0)+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x$.

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty}\left(F(0)+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{F(0)}{x}+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}-1\right)=+\infty$$

rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(F(x)-x\right)=+\infty$. (2)

Din (1), (2) şi din faptul că funcţia $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, H(x)=F(x)-x$, este continuă rezultă că $\exists\ x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $H(x_0)=0\Rightarrow F(x_0)=x_0$.