OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa, 15.02.2015

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1.

Dacă x este numărul submulţimilor mulţimii $A = \{\overline{abc} \mid \sqrt{\overline{0,a(bc)} + \overline{0,b(ca)} + \overline{0,c(ab)}} \in \mathrm{N}$ şi a>b>c>0$\}$ şi

$$y = (|3^{51} - 2^{85}| + 3^{2015} : 81^{491}) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8 - 5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}$$

Calculaţi media geometrică a numerelor x şi y .

SUBIECTUL 2.

Se dă numărul $a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \cdots + \frac{2015}{10050} - (2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + 2010^{-1})$

a) Arătaţi că $a - 2$ este pătrat perfect

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a}{2n+1} \in \mathbb{Z}$

SUBIECTUL 3.

Fie ABC un triunghi isoscel cu m($\sphericalangle ABC$) =108^0 , $[AB] \equiv [BC]$, BD este înălţimea dusă din B, $D \in [AC]$, iar $[AF]$ este bisectoarea unghiului A, $F \in [BC]$. Demonstraţi că $AF = 2 \cdot BD$.

O.J. Dolj, 1996

SUBIECTUL 4.

Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ şi N este simetricul lui M faţă de BC.

Dreapta NC intersectează paralela prin A la BC în T, iar TM intersectează BC în O şi pe AB în Q.

a) Demonstraţi că $ABCT$ este romb.

b) Arătaţi că $[BO]$ este linie mijlocie în triunghiul ATQ.

(Gazeta matematică nr.1 - 2013)

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

$\sqrt{\frac{\overline{abc}-a+\overline{bca}-b+\overline{cab}-c}{990}}=\sqrt{\frac{110a+110b+110c}{990}}=\sqrt{\frac{a+b+c}{9}}\in\mathbb{N}$ deci $a+b+c=9$. **2p**

Cum $a>b>c>0$ rezultă $A=\{621;531;432\}$, deci $x=2^{cardA}=2^3=8$ **1p**

Ţinând seama că $3^{51}=(3^3)^{17}=27^{17}; 2^{85}=(2^5)^{17}=32^{17} \Rightarrow 3^{51}<2^{85}\Rightarrow$

$y=(2^{85}-3^{51}+3^{2015}:3^{4\cdot 491}):(-2^{82})+36+5\sqrt{3}-8-5\sqrt{3}+16=36$ **3p**

$m_g=\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{8\cdot 36}=12\sqrt{2}$ **1p**

Subiectul 2.

a) $2^{-1}+3^{-1}+\cdots+2010^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2010}$ **1p**

$\frac{1}{5}+\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\cdots+\frac{2015}{10050}=\frac{1}{5}+\frac{5+2}{2\cdot 5}+\frac{5+3}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{5+2010}{2010\cdot 5}$..................................**2p**

$a=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2010}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2010}=\frac{1}{5}\cdot 2010=402$ **1p**

$a-2=400=20^2$ =pătrat perfect **1p**

b) $\frac{402}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(2n+1)\in D_{402}$..**1p**

$n\in\{0;1;33;100\}$ **1p**

Subiectul 3.

ΔABC: $[AB]\equiv[BC]\Rightarrow \sphericalangle A\equiv\sphericalangle C$ şi cum m($\sphericalangle ABC$) = $108^0\Rightarrow$ m($\sphericalangle A$)=m($\sphericalangle C$)= 36^0 .... **1p**

m($\sphericalangle BAF$)=m($\sphericalangle FAC$)=18^0; m($\sphericalangle AFB$)=54^0...**1p**

m($\sphericalangle DBC$)=$54^0\Rightarrow\Delta BOF$ este isoscel, unde $\{O\}=(BD\cap AF$, $\Rightarrow[OB]\equiv[OF]$....................................**1p**

Fie punctul E simetricul punctului B faţă de punctul $D\Rightarrow$ m($\sphericalangle AED$)=54^0 .... **2p**

dar m($\sphericalangle OAE$)=$54^0\Rightarrow\Delta OAE$ este isoscel $\Rightarrow[AO]\equiv[OE]\Rightarrow AO+OF=OE+OB$...**1p**

$\Rightarrow AF=BE$, $BE=2\cdot BD\Rightarrow AF=2\cdot BD$...**1p**.

Subiectul 4.

a) $ABCT$ = paralelogram **2p**

cu $AB\equiv BC\Rightarrow ABCT$ = romb.. **1p**

b) Notăm: $AP=PM=MC=\dfrac{AC}{3}$. Se arată că $BMTP$ = romb..**2p**

$\Rightarrow BP\parallel TM\Rightarrow BP\parallel MO$. Dar M mijlocul lui [PC]$\Rightarrow MO$ = linie mijlocie în triunghiul BCP **1p**

$\Rightarrow$O mijlocul lui BC. Deci $BO=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AT}{2}$ şi $BO\parallel AT\Rightarrow[BO]$ = linie mijlocie.......................**1p**

<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .