OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a VIII-a

1. (a) Arătaţi că $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

   (b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Ioana Maşca

2. Fie x, y, z numere reale pentru care sunt adevărate relaţiile: $x = \sqrt{1-2yz}$, $y = \sqrt{1-2zx}$, $z = \sqrt{1-2xy}$. Calculaţi $x+y+z$.

Gazeta Matematică 11/2015.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$x+y+z = 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y-8} + 10\sqrt{z-4} - 13.$$

Ioana Ciocirlan

4. Considerăm o piramidă patrulateră regulată $SMNPQ$, cu vârful S şi centrul bazei O, având toate muchiile de lungime l. Fie T simetricul lui M faţă de dreapta NP.

   a) Calculaţi distanţa dintre dreptele SO şi PT.

   b) Calculaţi distanţa de la punctul M la planul (SNP).

   c) Aflaţi tangenta unghiului format de planele (SMT) şi (MPS).

   d) O furnică porneşte din S, se deplasează pe faţa SMN, atinge muchia $[MN]$ într-un punct A, iar apoi se deplasează pe baza $MNPQ$ până ajunge în punctul F, mijlocul muchiei $[NP]$. Calculaţi NA ştiind că drumul parcurs de furnică din S până în F are lungimea minimă.

Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a VIII-a

1. a) Arătaţi că $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Ioana Maşca

Soluţie.

a) Pentru orice număr real, avem $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \leq x^2+1 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \geq 0$. **(3p)**

b) Dacă $x<0$, atunci $\frac{x}{x^2+1} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, deci $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = -1$. Ecuaţia devine $-1 = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$, echivalentă cu $-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 0$. Obţinem $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \subset (-\infty, 0)$. **(2p)**
Dacă $x \geq 0$, atunci $\frac{x}{x^2+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, deci $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = 0$. Ecuaţia devine $0 = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$, echivalentă cu $0 \leq \frac{2x+1}{3} < 1$. Obţinem $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cap [0,\infty) = [0,1)$. **(1p)**

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup [0,1)$. **(1p)**

2. Fie x, y, z numere reale pentru care sunt adevărate relaţiile: $x = \sqrt{1-2yz}$, $y = \sqrt{1-2zx}$, $z = \sqrt{1-2xy}$. Calculaţi $x+y+z$.

Gazeta Matematică 11/2015.

Soluţie.
Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietăţile din enunţ. Atunci $x, y, z \geq 0$, deci $x+y+z \geq 0$.**(2p)**.
Din ipoteză, $x^2+y^2+z^2 = (1-2yz)+(1-2zx)+(1-2xy) = 3-2(xy+yz+zx)$. **(1p)**
Atunci $(x+y+z)^2 = 3$, de unde $x+y+z \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. **(3p)**
Din $x+y+z \geq 0$, rezultă $x+y+z = \sqrt{3}$. **(1p)**

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$x+y+z = 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y-8} + 10\sqrt{z-4} - 13.$$

Ioana Ciocirlan

Soluţie.
Ecuaţia este definită pentru $x \in [2,\infty)$, $y \in [8,\infty)$, $z \in [4,\infty)$. **(1p)**
Ecuaţia este echivalentă cu $(\sqrt{x-2}-1)^2 + (\sqrt{y-8}-1)^2 + (\sqrt{z-4}-5)^2 = 0$. (**3p**)
O sumă de pătrate de numere reale este nulă numai dacă fiecare număr este nul. **(1p)**
Se obţine soluţia unică: $x=3$, $y=9$, $z=29$. **(2p)**

4. Considerăm o piramidă patrulateră regulată $SMNPQ$, cu vârful S şi centrul bazei O, având toate muchiile de lungime l. Fie T simetricul lui M faţă de dreapta NP.

a) Calculaţi distanţa dintre dreptele SO şi PT.

b) Calculaţi distanţa de la punctul M la planul (SNP).

c) Aflaţi tangenta unghiului format de planele (SMT) şi (MPS).

d) O furnică porneşte din S, se deplasează pe faţa SMN, atinge muchia $[MN]$ într-un punct A, iar apoi se deplasează pe baza $MNPQ$ până ajunge în punctul F, mijlocul muchiei $[NP]$. Calculaţi NA ştiind că drumul parcurs de furnică din S până în F are lungimea minimă.

Dorina Bocu

Soluţie.

a) ΔPMN şi $\triangle PNT$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele. Rezultă $OP \perp PT$. Dar $SO \perp (MNP)$, deci $OP \perp SO$. Atunci OP este perpendiculara comună a dreptelor SO şi PT. Ca urmare, $d(SO, PT) = OP = \frac{l\sqrt{2}}{2}$. **(1p)**

b) Fie E şi F mijloacele muchiilor $[MQ]$ şi $[NP]$. $MQ \| NP$, cu $NP \subset (SNP)$, de unde $MQ \| (SNP)$. Rezultă $d(M, (SNP)) = d(E, (SNP))$.
Construim $EH \perp SF$, $H \in SF$. Atunci, din $SF \perp NP$, $EF \perp NP$ şi $SF, NP \in (SNP)$, rezultă $EH \perp (SNP)$, deci $d(E, (SNP)) = EH$. Din $\triangle SOM$ obţinem $SO = l/\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A}_{SEF} = \frac{EF \cdot SO}{2} = \frac{SF \cdot EH}{2}, \text{ de unde } EH = \frac{EF \cdot SO}{SF} = l \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{6}}{3}.\textbf{(2p)}$$

c) $PT \perp MP$ şi $PT \perp SO$, de unde $PT \perp (SMP)$. $\Delta SMP \equiv \triangle NMP$ (L.L.L.), deci $m(\widehat{MSP}) = 90°$. Cf. Teoremei celor 3 perpendiculare, $PT \perp (SMP)$, $PS \perp MS$ şi $SP, MS \subset (SMP)$ implică $TS \perp MS$. $(SMT) \cap (MSP) = MS$, $ST \perp MS$, $ST \subset (STM)$, $SP \perp MS$ şi $SP \subset (SMP)$ implică $m(\widehat{(SMT), (MSP)}) = m(\widehat{PST})$.
Triunghiul ΔSPT este dreptunghic în P, deci $\text{tg}(\widehat{PST}) = \frac{PT}{PS} = \frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2}$. **(2p)**

d) Fie $S' \in (MNP)$, astfel ca $\triangle S'MN$ să fie echilateral, iar S' şi F să fie în semiplane opuse faţă de MN. Lungimea drumului minim parcurs de furnică este lungimea segmentului $[S'F]$ Astfel, $\{A\} = [S'F] \cap [MN]$. Fie B mijlocul lui $[MN]$. Avem $S'B = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. $SB \parallel NF$ implică $\Delta NAF \sim \Delta BAS$, de unde $\frac{NA}{BA} = \frac{NF}{S'B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Atunci $\frac{NA}{NB} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$. Obţinem $NA = \frac{l(\sqrt{3}-1)}{4}$. **(2p)**