OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a VI- a

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numerele naturale a=3n+2, b=2n+1 și c=n+1, n∈ ℕ .

3p) a) Demonstraţi că a și b sunt prime între ele.

4p) b) Arătaţi că numărul $[a, b] + [a, c]$ este pătrat perfect , pentru orice număr natural n (s-a notat cu $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).

SUBIECTUL II (7p)

7p) Arătați că :

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2016}<\frac{2016}{2017}$$

SUBIECTUL III (7p)

7p) Fie A=$\{(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 10a+b \text{ se divide cu } 19\}$ și
B=$\{(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 2015a+2b \text{ se divide cu } 19\}$.
Arătați că A⊃B.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL IV (7p)

Fie punctele coliniare A,O și B, cu O∈ (AB). De aceeași parte a dreptei AB se consideră punctele C și D astfel încât unghiurile ∡AOC și ∡COD să fie adiacente. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului ∡AOC și $[ON$ bisectoarea unghiului ∡BOD .Se știe că m(∡MOD)=115° și m(∡NOC)=110°

3p) a) Arătați că unghiul ∡COD este drept.

2p) b) Aflați m(∡AOC) și m(∡DOB).

2p) c) În interiorul unghiului ∡COD se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea în O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule. Demonstrați că cel puțin două dintre aceste unghiuri sunt congruente.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: **2 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală- 21.02.2016
Clasa a VI- a
Barem de evaluare şi notare

Subiectul I

Se consideră numerele naturale a=3n+2, b=2n+1 și c=n+1, n$\in \mathbb{N}$.

a) Demonstraţi că a și b sunt prime între ele.

b) Arătaţi că numărul $[a,b]+[a,c]$ este pătrat perfect , pentru orice număr natural n (s-a notat cu $[x,y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).

Soluție:

a) Fie d$\in\mathbb{N}$, d/a și $d/b \Rightarrow d/2a$ și $d/3b$ 1p
d/2a- 3b, 2a-3b=1 $\Rightarrow$d/1$\Rightarrow$ d=1$\Rightarrow$ (a,b)=1 .... 2p

b) Din a) avem (a,b)=1 $\Rightarrow$ $[a,b]$=ab 1p
(a,c)=1 $\Rightarrow$ $[a,c]$=ac 1p
$[a,b]+[a,c]$=ab +ac=a(b+c)=$(3n+2)^2$ 2p

Subiectul II

Arătați că :

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots..+\frac{1}{1+2+3+\cdots.+2016}<\frac{2016}{2017} .$$

Soluție:

1+2+3+....+2016=$\frac{2016\cdot2017}{2}$ 1p

1+2=$\frac{2\cdot3}{2}$, 1+2+3=$\frac{3\cdot4}{2}$, 1+2+3+4=$\frac{4\cdot5}{2}$,..1p

S= $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots..+\frac{1}{1+2+3+\cdots.+2016}=\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2}{4\cdot5}+\cdots+\frac{2}{2016\cdot2017}$ 2p

S=$2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017})=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2017})=\frac{2015}{2017}<\frac{2016}{2017}$ 3p

Subiectul III

Fie A=$\{(a;b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|10a+b\ \vdots\ 19\}$ și B=$\{(a;b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|2015a+2b\ \vdots\ 19\}$.

Arătați că A$\supset$B.

Soluție:

Arătăm că daca (a;b)$\in B$ atunci (a;b)$\in A$ 1p

- Fie (a;b)$\in B$ $\Rightarrow$ 19/2015a + 2b ,cum 19/1995a $\Rightarrow$ 19/20a+2b

20a+2b=2(10a+b) și (19,2)=1, rezultă că 19/10a+b, deci (a;b)$\in A$ 6p

Subiectul IV

Fie punctele coliniare A,O și B, cu O$\in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB se consideră punctele C și D astfel încât unghiurile ∡AOC și ∡COD să fie adiacente. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului ∡AOC și $[ON$ bisectoarea unghiului ∡BOD. Se știe că m(∡MOD)=115° și m(∡NOC)=110°

a) **Arătați că unghiul ∡COD este drept.**

b) **Aflați m(∡AOC) și m(∡DOB).**

c) **În interiorul unghiului $\sphericalangle COD$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea în O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule. Demonstrați că cel puțin două dintre aceste unghiuri sunt congruente.**

Soluție:

a) Pentru figură corectă **1p**

Notăm $x=m(\sphericalangle AOM)=m(\sphericalangle MOC)$ și cu $y=m(\sphericalangle BON)=m(\sphericalangle NOD)$.

Din relațiile $2x+2y+m(\sphericalangle COD)=180°$, $x+m(\sphericalangle COD)=115°$ și $y+m(\sphericalangle COD)=110°$,

se obține că $m(\sphericalangle COD)=90°$ **2p**

b) $m(\sphericalangle MOC)=115°-90°=25°$.

$m(\sphericalangle AOC)=2m(\sphericalangle MOC)=2\cdot 25°=50°$ **1p**

$m(\sphericalangle DOB)=40°$ **1p**

c) Suma măsurilor celor 13 unghiuri este $90°$.

$1+2+3+\ldots+13=91>90$, de unde concluzia cerută. **2p**