

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-GIURGIU-16.02.2013

CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea $K = (5, \infty)$ definim legile de compoziție

$$x * y = (x - 5)(y - 5) + 5,$$

$$x \circ y = 5 + (x - 5)^{\lg(y-5)}, \forall x, y \in K.$$

a) Arătați că legile sunt asociative și K are elemente neutre în raport cu ele

b) Verificați relația: $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \forall x, y, z \in K$

2. Se consideră o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile $A^3 = I_2, A \neq I_2$.

a) Să se arate că mulțimea $M = \{B \in M_2(\mathbb{C}) \mid AB = BA, \det B \neq 0\}$

este grup în raport cu înmulțirea matricilor.

b) Să se demonstreze că matricea $A + I_2$ este inversabilă și să se afle inversa ei.

3. Să se calculeze:

$$\int \frac{2e^{2x} + 2e^x \cos x + \cos 2x}{2e^{2x} + 2e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x} dx, x > 0.$$

Paul Băiatu, Giurgiu

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4\sin^2 x \cos 3x + 4\cos^2 x \sin 3x.$$

Calculați:

a) $f'(x)$;



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

b) $\int (x) dx$.

Ionel Tudor, Călugăreni