Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a X-a

Problema 1.

Se consideră funcţia: $f:\mathbb{C}\setminus\{-i\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$.

a) Arătaţi că $|f(z)|=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

b) Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0=2$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$. Calculaţi $x_0+x_1+...+x_{2014}$.

Problema 2.

Rezolvaţi sistemul: $2014\cdot\lg[x]+\{\lg y\}=2014\cdot\lg[y]+\{\lg z\}=2014\cdot\lg[z]+\{\lg x\}=0$.

Problema 3.

Fie $m,n,p\in\mathbb{N}^*$. Dacă $4^{\frac{m}{n+p}}+4^{\frac{n}{m+p}}+4^{\frac{p}{n+m}}=6$, arătaţi că $m=n=p$.

Problema 4.

a) Fie $a,b,c,d,\alpha\in\mathbb{C}$ cu $|a|=|b|\neq 0, |c|=|d|\neq 0$. Demonstraţi că, pentru $n\geq 1$, rădăcinile ecuaţiei $c(bx+a\alpha)^n-d(ax+b\overline{\alpha})^n=0$ sunt numere reale.

b) Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon regulat înscris într-un cerc de centru O şi rază R. Pe semidreapta $[OA_1$ se ia un punct P astfel încât $A_1\in(OP)$. Demonstraţi că $\prod_{k=1}^{n}PA_k=PO^n-R^n$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iaşi
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

a) $\left|f(z)\right|=1 \Leftrightarrow |z-i|=|z+i|$ **1p**

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{a^2+(b+1)^2}$, unde $z=a+bi$; $a,b\in\mathbb{R}$ **2p**

$\Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ **1p**

b) $x_1=f(2)=\dfrac{3-4i}{5}$, $x_2=-3i$ **1p**

$x_{n+3}=x_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$x_0+x_1+...+x_{2014}=672(x_0+x_1)+671x_2$ **1p**

Problema 2.

$[x]>0 \Rightarrow x\geq 1$; analog celelalte **1p**

$\lg[x]=-\dfrac{\{\lg y\}}{2014}\in\left(-\dfrac{1}{2014},0\right]$ **1p**

$\Rightarrow 10^{-\frac{1}{2014}}<[x]\leq 1 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow \{\lg y\}=0 \Rightarrow \lg y\in\mathbb{Z}$; analog celelalte **3p**

Deci $x,y,z\in[1,2)$ şi pentru $\lg x=n\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=10^n\in[1,2)\Rightarrow n=0\Rightarrow x=1$

Analog $y=1, z=1$ **2p**

Problema 3.

Din inegalitatea mediilor, $4^{\frac{m}{n+p}}+4^{\frac{n}{m+p}}+4^{\frac{p}{n+m}}\geq 3\sqrt[3]{4^{\frac{m}{n+p}+\frac{n}{m+p}+\frac{p}{n+m}}}$ **2p**

$\dfrac{m}{n+p}+\dfrac{n}{m+p}+\dfrac{p}{n+m}\geq\dfrac{3}{2}$ **2p**

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{4^{\frac{m}{n+p}+\frac{n}{m+p}+\frac{p}{n+m}}}\geq 3\sqrt[3]{4^{\frac{3}{2}}}=6$ **1p**

Egalitatea în ambele inegalități pentru $\dfrac{m}{n+p}=\dfrac{n}{m+p}=\dfrac{p}{n+m}\Rightarrow m=n=p$ **2p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 4.

a) $\left|\frac{d}{c}\right|=1\Rightarrow\left(\frac{bx+a\alpha}{ax+b\overline{\alpha}}\right)^n=\frac{d}{c}=\cos t+i\sin t, t\in[0,2\pi)$ **1p**

$\frac{bx_k+a\alpha}{ax_k+b\overline{\alpha}}=u_k=\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\Rightarrow x_k=\frac{b\overline{\alpha}u_k-a\alpha}{b-au_k}, k=\overline{0,n-1}$ **1p**

$|a|=|b|=r\Rightarrow\overline{x_k}=\frac{\overline{b}\alpha\overline{u_k}-\overline{a}\overline{\alpha}}{\overline{b}-\overline{au_k}}=\frac{\frac{r^2}{b}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{u_k}-\frac{r^2}{a}\cdot\overline{\alpha}}{\frac{r^2}{b}-\frac{r^2}{a}\cdot\frac{1}{u_k}}=x_k$ **1p**

$\Rightarrow x_k\in\mathbb{R}, k=\overline{0,n-1}$ **1p**

b) Reper cu originea în centrul cercului circumscris şi axa reală *OP*....................... **1p**

$A_k(z_k)$, $z_k=R\varepsilon_k$, ε_k - rădăcinile de ordin *n* ale unității, *P*(*Rx*,0) **1p**

$\prod_{k=1}^{n}PA_k=\prod_{k=1}^{n}|Rx-R\varepsilon_k|=R^n\prod_{k=1}^{n}|x-\varepsilon_k|=R^n\left|\prod_{k=1}^{n}(x-\varepsilon_k)\right|=R^n\left(x^n-1\right)=PO^n-R^n$ ... **1p**