OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
BAREM DE CORECTARE
clasa a IX-a
Etapa locală, 21 februarie 2016

1) Adunăm ecuațiile sistemului și obținem:

$2(x+y+z)=7 \Leftrightarrow x+y+z=3{,}5$ .... 2 p.

Din această relație scădem prima ecuație și avem $[z]+\{y\}=2{,}3$. Deci $[z]=2$ și $\{y\}=0{,}3$ 1 p.

Analog procedăm cu celelalte două ecuații ale sistemului și obținem:

$[x]=1$; $\{z\}=0{,}2$; $[y]=0$; $\{x\}=0$ .... 2 p.

Finalizare: $x=1$; $y=0{,}3$ și $z=2{,}2$ .... 2 p.

2) Este cunoscută inegalitatea:

***** $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$ unde $x,y,z\in\mathbf{R}$ și $\alpha,\beta,\gamma>0$

(Este o consecință imediată a inegalității lui Cauchy) .... 1 p.

Folosind această inegalitate avem:

$$1\geq\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}=\frac{a^2}{ab+ac+a}+\frac{b^2}{ab+bc+b}+\frac{c^2}{ac+bc+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+a+b+c}$$

$\Leftrightarrow a+b+c\geq a^2+b^2+c^2$ .... 2 p.

Din inegalitatea lui Cauchy obținem: $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)\leq 3(a+b+c)$

Deci $a+b+c\leq 3$ .... 2 p.

Acum folosind din nou inegalitatea ***** avem:

$$\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}+\frac{1}{a+b+1}\geq\frac{(1+1+1)^2}{2(a+b+c)+3}=\frac{9}{2(a+b+c)+3}\geq\frac{9}{2\cdot 3+3}=1$$ .... 2 p.

3) Fie O un punct arbitrar în planul triunghiului ABC. Notăm cu X, Y, Z centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, MNP respectiv DEF.

$\overrightarrow{OX}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ .... 1 p.

$$\overrightarrow{OY}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}}{3}=\frac{\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}}{3}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\overrightarrow{OX}\Rightarrow X=Y$$ ... 3 p.

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PF}}{3}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}\right)}{3}=$$

$=\overrightarrow{OY}\Rightarrow Y=Z$.

Deci $X=Y=Z$ .... 3p.

4) Avem $n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}$ .... 2 p.

$n\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + p\overrightarrow{PC} = n\overrightarrow{PM} + n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{PM} + m\overrightarrow{MB} + p\overrightarrow{PC} = (m+n)\cdot\overrightarrow{PM} + p\cdot\overrightarrow{PC}$ .... 2 p.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul MBC cu transversala A–P–N obținem:

$\frac{PM}{PC}\cdot\frac{NC}{NB}\cdot\frac{AB}{AM} = 1$, de unde rezultă:

$\frac{PM}{PC} = \frac{n}{p}\cdot\frac{m}{m+n} = \frac{p}{m+n}$ .... 2 p.

În plus, $\overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PC}$ au sensuri opuse, deci $(m+n)\cdot\overrightarrow{PM} + p\cdot\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .... 1 p.