
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Arătați că numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017 + 2017 + 2017^2 + \dots + 2017^{2017}$ nu este pătrat perfect.

Prof. Tomescu Ion, Mizil și Lupea Ion, Ploiești

2. a. Calculați: $44^2 + 9^2$;

b. Scrieți numărul 2017^{2017} ca o sumă de două pătrate perfecte.

Prof. Gheorghe Crăciun, Ploiești

3. Considerăm mulțimea $A = \{3^m \cdot 5^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq 50, n \leq 50\}$.

a. Determinați cardinalul mulțimii A .

b. Demonstrați că orice submulțime P a mulțimii A cu 5 elemente conține cel puțin două elemente distincte, al căror produs este pătrat perfect.

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

4. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 9^{2k+1} + 3^{4k+1} + 1, k \in \mathbb{N}\} \text{ și } B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 8^{2p+1} + 8^{2p}, p \in \mathbb{N}\}.$$

a. Arătați că $973 \in A$ și $576 \in B$.

b. Determinați $A \cap B$.

Prof. Roxana Soare, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Dacă împărțim un număr de trei cifre la răsturnatul său, obținem câtul 6 și restul 47. Aflați numărul știind că diferența dintre numărul căutat și răsturnatul său este un număr natural cu exact 24 divizori.

prof Gheorghe Achim, Mizil

2. a. Fie p număr prim mai mare ca 5. Arătați că ultima cifră a pătratului său poate fi doar 1 sau 9.

b. Determinați numărul prim p , știind că $p^2 = \overline{xyzt}$ și $x+t=y$ iar $z=2y$.

prof Țaga Gabriel, Ploiești

3. Demonstrați că fracția $F = \frac{5^{n+1} \cdot 11^n + 8}{5^n \cdot 11^{n+1} + 16}$ este ireductibilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

prof. Anton Negrilă, Ploiești

4. Fie u_1, u_2, \dots, u_n unghiuri în jurul unui punct O , oricare două consecutive fiind complementare.

a. Arătați că $n = 8$.

b. Aflați măsurile celor opt unghiuri, știind că printre ele se află un unghi de $20^\circ 17'$.

prof. Bilciurescu Ion, Boldești - Scăeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Se consideră numerele raționale a, b, c pentru care au loc egalitățile:

$$ab(a+b+c)=13, bc(a+b+c)=39, ac(a+b+c)=117.$$

Calculați valoarea produsului abc .

prof. Anton Negrilă, Ploiești

2. Determinați mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{3\sqrt{n} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{n} + \sqrt{2}} \in \mathbb{Z} \right\}$.

prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu $\angle BCD = 90^\circ$. Paralela prin B la DC este bisectoarea unghiului ABD și intersectează dreapta AD în punctul M .

Arătați că $\frac{BM}{DC} = \frac{2AB}{AB+BD}$.

prof. Gh. Bumbăcea, Bușteni

4. În $\triangle ABC$, bisectoarea (AD) a unghiului BAC , $D \in (BC)$, are aceeași lungime cu latura $[AC]$,

$$m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{A}) \text{ iar bisectoarea } \sphericalangle ABC \text{ intersectează } AD \text{ în } I.$$

a. Aflați măsurile unghiurilor $\triangle ABC$;

b. Demonstrați că $AB = BC + CI$.

prof. Silvia Brabeceanu și Ionel Brabeceanu, Plopeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. Arătați că numărul $A = \sqrt{2007 \cdot 2009 \cdot 2015 \cdot 2017 + 64} \in \mathbb{N}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. a. Fie $a, b, x, y \in (0, \infty)$ cu $a + b > 1$. Demonstrați că $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} > \frac{1}{ax + by}$.

b. Fie $x > 0, y > 0$. Demonstrați că $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) > \left(\frac{1}{2x + 3y} + \frac{1}{3x + 2y}\right)$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Fie pătratul ABCD de latură a și paralelogramul BCEF, B fiind mijlocul segmentului [AE]. Construim $MF \perp (BEC)$, $MF = 2a$.

a. Calculați CQ, unde Q este punctul de intersecție al dreptelor BC și AF;

b. Demonstrați că $OQ \parallel (MCF)$, O fiind centrul pătratului;

c. Aflați A_{BCEF} , dacă $d(M, AC) = \sqrt{17}$.

Prof. Bilciurescu Ion, Boldești-Scăeni

4. Fie rombul ABCD cu $BD = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{5}$ și $M \notin (ABC)$, astfel încât $MA = MB = MD = a$. Aflați distanța de la punctul C la planul (MAB).

Prof. Tomescu Ion, Mizil și Lupea Ion, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} + \frac{zx}{\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}} + \frac{xy}{\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}} \leq \frac{3}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y, z > 0.$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și ecuația $\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\} = n-1, x \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x .
- Demonstrați că ecuația nu are soluții iraționale.
 - Arătați că ecuația are o infinitate de soluții.
 - Pentru $n=4$, aflați câte soluții are ecuația dată în intervalul $[0; 2017]$.

prof Emil Vasile, Ploiești

3. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $BM = CN = x$. Fie E și F mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$ și $[AD]$ bisectoarea unghiului BAC .

- Demonstrați că $EF \parallel AD$.
- Determinați x astfel încât $\overline{EF} = \frac{1}{3} \overline{AD}$.

prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Se consideră patrulaterul $ABCD$ și punctele E, F, G astfel încât $\overline{AF} = 3\overline{DF}, \overline{EC} = 2\overline{DE}, \overline{GA} = 3\overline{EG}$. Dacă punctele F, E, B și respectiv D, G, B sunt coliniare, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

prof. Militaru Claudiu, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. a. Demonstrați că $5^{\log_3 2} = 2^{\log_3 5}$.

b. Rezolvați ecuația $x^{\log_{2017}(x-1)} + 2017(x-1)^{\log_{2017} x} = 2018x^2$, $x > 1$.

prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

2. a. Demonstrați că $\log_5(4^x + 3^x) < x$, pentru orice x real, cu $x > 2$.

b. Rezolvați în \mathbb{N}^* ecuația: $\log_5(4^x + 3^x) = 2 \cdot \log_3(2^x - 1)$.

prof. Claudiu Militaru, Ploiești

3. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $\left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| \leq 2$. Arătați că $\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2$.

4. Fie $z \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$, $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(z) < 0$ și funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \lfloor 1 - nz \rfloor$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, unde

$\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a lui x .

a. Rezolvați ecuația: $x^2 + x \cdot f(1) + f(2) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

b. Studiați injectivitatea funcției $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(n) = \left| 1 + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(1)} + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(2)} + \dots + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(n)} \right|$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timpe de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{an^3 + bn^2 + 1} - \log_5(3^n + 4^n + 5^n) - \sqrt[4]{n^4 + 4} \right) = 1$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_{n+1} = a_n - a_n^2 + a_n^3 - a_n^4 + a_n^5$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Știind că $a_1 \in (0; 1)$, demonstrați că este convergent și calculați limita lui.

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

3. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și tA matricea transpusă. Știind că $\det(A + {}^tA) = 8$ și $\det(A + 2 \cdot {}^tA) = 27$, calculați $\det A$.

4. a. Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0_2$ și $\text{rang } A = 1$. Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = A$.

b. Determinați matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relațiile :

$$X(X^2 + Y^2) + Y(XY + YX) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ și } X(XY + YX) + Y(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. a. Calculați: $I_1 = \int \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} dx$ și $I_2 = \int \frac{e^{-x} + \sin x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} dx$;

b. Fie funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ și $F : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Dacă

$$(e^{-x} + \sin x + \cos x)F(x) = \cos x - x(e^{-x} + \sin x + e^x \cos x)f(x), \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

determinați funcția f .

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. Fie (G, \cdot) un grup de element neutru e și cu proprietatea că există $a, b \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $a \neq b, a^2 = b^2 = e$ și $(ab)^2 = ba$.

a. Arătați că:

(i) (G, \cdot) nu este grup abelian;

(ii) Ordinul lui G este cel puțin egal cu 6.

b. Dați exemplul de un grup finit cu proprietatea din enunț și cu ordinul mai mare decât 6.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

3. a. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^{2017}$. Demonstrați că există o primitivă G a sa, astfel încât $|G(x) - g(x)| > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b. Determinați funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât există F o primitivă a sa, cu proprietatea

că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există un interval mărginit I_n cu $0 < |F(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, oricare ar fi $x \in I_n$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} dx \right)^n$.

Prof. Ovidiu Avramescu, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.