OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
CLASA A XI- A

SOLUȚII ȘI BAREME

Subiectul 1.

Determinați matricea $A\in M_3(C)$, dacă $A^*=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 1\\ 1 & -5 & 7\\ 7 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

G.M. 12/2015

Soluție:

Scrie relația $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3, \det A\neq 0$, iar $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$ ....**(1p).**

Justifică A^* inversabilă, $\det A^*=324$, și calculează inversa sa $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.......**(3p).**

Arată că $A=(\det A)\cdot (A^*)^{-1}$ ....**(1p).**

Arată $\det A^*=(\det A)^2$, $\det A=\pm 18$ ....**(1p).**

Finalizare $A=\pm\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ ....**(1p).**

Problema 2.

Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+ka & ka\\ a & 1+a\end{pmatrix}, a\in C^*, k\in N^*$. Să se calculeze $(X(a))^n, n\in N^*$

prof. Dicu Florentina, Rm. Vâlcea

Soluție:

Scrie $X(a)=\begin{pmatrix}1+ka & ka\\ a & 1+a\end{pmatrix}=I_2+aA, A=\begin{pmatrix}k & k\\ 1 & 1\end{pmatrix}, k\in N^*$ .... **(1p).**

Calculează $A^2=(k+1)\begin{pmatrix}k & k\\ 1 & 1\end{pmatrix}=(k+1)A$, iar apoi

$X(a)\cdot X(b)=I_2+aA+bA+(k+1)abA=X((k+1)ab+a+b)$

$$X(a)\cdot X(b)=X\left((k+1)\left(a+\frac{1}{k+1}\right)\left(b+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k+1}\right)$$ ....**(3p).**

Deci $(X(a))^2=X\left((k+1)\left(a+\frac{1}{k+1}\right)^2-\frac{1}{k+1}\right), (X(a))^3=X\left((k+1)^2\left(a+\frac{1}{k+1}\right)^3-\frac{1}{k+1}\right)$ ....**(1p).**

$(X(a))^n=X\left((k+1)^{n-1}\left(a+\frac{1}{k+1}\right)^n-\frac{1}{k+1}\right)$ ....**(1p).**

Finalizare inducție matematică .... **(1p).**

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0 = 0$$
$$x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1), (\forall) n \geq 1$$

Studiați convergenta șirului și apoi determinați limita sa.

***

Soluție:

Cum $x_n - 1 = \sin(x_{n-1} - 1), (\forall) n \geq 1$ .... **(1p).**

Dacă notăm $a_n = x_n - 1, (\forall) n \geq 1$, atunci $a_n = \sin a_{n-1}, (\forall) n \geq 1$. ....**(1p).**

Deoarece $a_0 = -1$, deducem că $a_n < 0$, $(\forall) n \geq 1$ ....**(1p)**

$(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător.. **(1p).**

Deci convergent și există limita sa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in R$ ....**(1p).**

Rezultă $a = \sin a,$ .... **(1p).**

Deci $a = 0,$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$ ....**(1p).**

Problema 4.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x\cos 2x\cos 4x...\cos 2^n x}{(x-\pi)^2}$

prof. Dicu Florentina, Rm. Vâlcea

Soluție:

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x\cos 2x\cos 4x...\cos 2^n x}{(x-\pi)^2}$ se gasește în cazul de nedetreminare $\dfrac{0}{0}$ ....**(1p).**

Se face substituția $y=x-\pi, y\to 0$ și limita devine $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y\cos 2y\cos yx...\cos 2^n y}{y^2}$ **...(1p).**

La numărător facem artificiu de calcul:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y\cos 2y\cos yx...\cos 2^n y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y+\cos y-\cos y\cos 2y\cos yx...\cos 2^n y}{y^2}=$$

....(2p).

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}+\lim_{y\to 0}\frac{\cos y(1-\cos 2y\cos yx...\cos 2^n y)}{y^2}=...=\sum_{k=0}^{n}\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos 2^k y}{y^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 2^{k-1}y}{y^2}=\sum_{k=0}^{n}\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 2^{k-1}y}{\left(2^{k-1}y\right)^2}\cdot\frac{2^{2k-2}y^2}{y^2}=2\sum_{k=0}^{n}\lim_{y\to 0}\frac{2^{2k-2}y^2}{y^2}=2\sum_{k=0}^{n}2^{2(k-1)}=$$ **............(2p).**

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}2^{2k}=\frac{2^{2n+2}-1}{2\cdot 3}=\frac{2^{2n+2}-1}{6}$$ **...(1p).**