Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
VI. OSZTÁLY

1. feladat. Egy táblára felírtuk a 11-es és 13-as számokat. Egy lépésben felírjuk a táblára két olyan tetszőleges szám összegét, amelyek már a táblán vannak. Igazold, hogy

a) Bármilyen lépéseket teszünk, nem jelenik meg a táblán a 86-os szám!

b) Egy bizonyos számú lépés után elérhető, hogy a táblára a 2015-öst írjuk!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az ABC tompaszögű háromszögben $AB = AC$. Legyen M az A pont szimmetrikusa a C pontra nézve, az AB egyenes és az $[AM]$ szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja P. Bizonyítsd be, hogy ha a PM egyenes merőleges a BC egyenesre, akkor az APM háromszög egyenlő oldalú!

3. feladat. Határozd meg azokat az ötjegyű négyzetszámokat, amelyek első két számjegye azonos és fordítottjuk is ötjegyű négyzetszám!

(Egy természetes szám *fordítottja* a szám számjegyei fordított sorrendjében való felírásával kapott szám, pl. 12345 fordítottja 54321)

4. feladat. Határozd meg azokat az A és B nem nulla természetes számokat, amelyeknek ugyanannyi számjegyük van és

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

ahol $\overline{AB}$ azt a természetes számot jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy egymás után leírjuk az A és B számokat.

Munkaidő 2 óra + 30 perc kérdésekre.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătaţi că:

a) indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;

b) este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma $11a + 13b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă ar exista $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $86 = 11a + 13b$, atunci $b \leq 6$ **1p**

Atunci $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$, deci $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$ **1p**

Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă **1p**

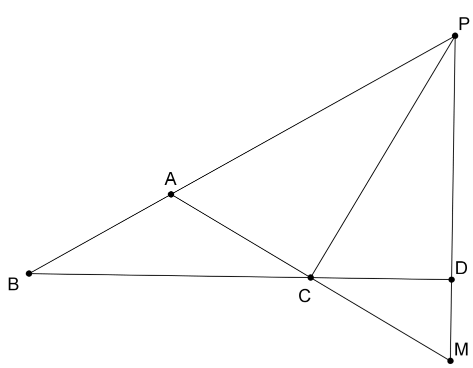
b) $2015 = 11 \cdot 182 + 13$. **1p**

Putem obţine numărul 2015 prin 182 de paşi astfel:

$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \ldots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015$ .. **2p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A faţă de punctul C şi cu P intersecţia dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Ştiind că dreapta PM este perpendiculară pe BC, arătaţi că triunghiul APM este echilateral.

Soluţie



Fie $\{D\} = BC \cap PM$. Notăm $m(\sphericalangle ABC) = x$. Atunci $m(\sphericalangle MCD) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = x$, de unde $m(\sphericalangle PMC) = 90° - x$ **2p**

Cum PC este mediatoarea segmentului $[AM]$, triunghiul PAM este isoscel, deci $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle PAC$ **2p**

Dar $m(\sphericalangle PAC) = 180° - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 2x$.

Rezultă $90° - x = 2x$, de unde $x = 30°$ **2p**

Atunci $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60°$, deci triunghiul APM este echilateral.............. **1p**

Problema 3. Determinaţi pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

Soluţie

Fie $\overline{aabcd}$ un pătrat perfect cu $a \neq 0, d \neq 0$, astfel încât $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect.

Deoarece $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect, rezultă $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb55}$ sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb66}$ sunt divizibile cu 2 şi nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte.. **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb11}$ sau $\overline{dcb99}$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărţirea cu 4 .... **2p**

Studiem cazul $a = 4$. Întrucât $209^2 < 44000$ şi $213^2 > 45000$, rezultă că $\overline{aabcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$.

Cum $210^2 = 44100$ nu are răsturnatul de 5 cifre, $211^2 = 44521$ şi $12544 = 112^2$, $212^2 = 44944$, numerele căutate sunt 44521 şi 44944 .... **2p**

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule A şi B, care au acelaşi număr de cifre, ştiind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obţinut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A.

Soluţie Fie n numărul de cifre ale lui A şi B. Din relaţia din enunţ avem $(2A-1)B = 10^n A$, de unde $2A - 1 \mid 10^n A$ **1p**

Cum $(2A-1, A) = 1$ şi $(2, 2A-1) = 1$, rezultă $2A - 1 \mid 5^n$, deci $2A - 1 \leq 5^n$ **2p**

Deoarece A are n cifre, rezultă $A \geq 10^{n-1}$, deci $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$. Obţinem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci $2^n \leq 6$, de unde $n \in \{1, 2\}$ **2p**

Pentru $n = 1$, din $2A - 1 \mid 5$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5\}$, deci $A \in \{1, 3\}$. Dacă $A = 1$, avem $B = 10$, care nu convine, deoarece B are o cifră. Dacă $A = 3$, avem $B = 6$ **1p**

Pentru $n = 2$, din $2A - 1 \mid 25$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$, deci $A \in \{1, 3, 13\}$; dar A are două cifre, deci $A = 13$ şi $25B = 1300$, deci $B = 52$. **1p**