**Olimpiada de matematică**
**Etapa locală 16.02. 2013**
**Barem de notare clasa a VII–a**

| **Soluție problema 1** | |
|---|---|
| a) Inegalitatea se scrie $2013+\sqrt{2013}<2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013}<46 \Leftrightarrow 2013<46^2 \Leftrightarrow 2013<2116$, evident. | 1p |
| b) $2013<x^2<2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013}<x<\sqrt{2059}$. | 1 p |
| Dar $44<\sqrt{2013}$ și $\sqrt{2059}<46$. Rezultă inegalitatea $44<x<46$. Cum $x\in\mathbb{N}$, rezultă $x=45$ care verifică inegalitățile date. | 1p |
| c) Notăm $\sqrt{2013+\sqrt{2013-n}}=p \Rightarrow 2013+\sqrt{2013-n}=p^2$ | 1p |
| Rezultă $2013<p^2<2013+\sqrt{2013}<2059$. Conform punctului precedent $p=45$ | 1p |
| Înlocuind rezultă $\sqrt{2013+\sqrt{2013-n}}=45$, de unde se obține $\sqrt{2013-n}=12$ | 1p |
| Rezultă $n=1869$. | 1p |
| Total punctaj problema 1 | **7 p** |
| **Soluție problema 2** | |
| a) Aducând la același numitor și eliminând numitorii, egalitatea se scrie astfel $(k+1)-k=1$, iar aceasta este evidentă | 1p |
| b) Împărțind prin $k+1>0$ inegalitatea se scrie $k<k+1$, iar aceasta este eidentă | 1p |
| c) Din b) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}$. | 1p |
| Ținând cont de a) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. | 1p |
| Deci<br>$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$<br>$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$<br>……………………..<br>$\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$<br>Adunând aceste inegalități rezultă $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...+\frac{1}{100^2}<0,99$. | 1p |
| Adunând 1 și scăzând 1 în membrul întâi, rezultă<br>$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...+\frac{1}{100^2}-1<0,99 \Rightarrow a-1<0,99 \Rightarrow a-0,99<1$ | 1p |
| Deoarece $a>1$ rezultă $a-0,99>0$. Atunci $a-0,99=\|a-0,99\|$. Cum $\|a-0,99\|=\|0,99-a\|$, din ultima inegalitate rezultă concluzia. | 1p |
| Total punctaj problema 2 | **7 p** |

| Soluție problema 3 | |
|---|---|
| a) Aria dreptunghiului $ABCD$ este de două ori aria triunghiului $ABC$. | 1p |
| $BM$ este înălţime în triunghiul $ABC$. | 1p |
| Rezultă $A_{[\triangle ABC]} = \dfrac{BM \cdot AC}{2} = 6\ cm^2$ , $A_{[ABCD]} = 12\text{cm}^2$ . | 1p |
| b) $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, deci înălţimile lor sunt congruente, adică $BM = DN$ . | 1p |
| $BM \perp AC$ şi $DN \perp AC \Rightarrow BM \parallel DN$ . Prin urmare patrulaterul $BMDN$ este paralelogram (are două laturi opuse paralele şi congruente). | 1p |
| c) Presupunem, prin reducere la absurd, că paralelogramul $BMDN$ este un romb. Atunci $BD \perp AC$ . | 1p |
| Deoarece dreptunghiul $ABCD$ are diagonalele perpendiculare el este pătrat, adică $AB = BC$ , ceea ce contrazice ipoteza. | 1p |
| Total punctaj problema 3 | **7 p** |
| **Soluție problema 4** | |
| $\triangle AMN \sim \triangle BCM$ (deoarece $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AN}{BM}$, iar triungiurile sunt dreptunghice) $\Rightarrow \dfrac{MN}{CM} = \dfrac{1}{2}$ | 1p |
| Rezultă relațiile: | |
| $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle BCM$ | 1p |
| $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle BMC$ | 1p |
| $m(\sphericalangle ANM) + m(\sphericalangle AMN) = 90^\circ$ | 1p |
| Rezultă că triunghiul $MNC$ este dreptunghic în $M$ | 1p |
| $\triangle MNC \sim \triangle ANM$ (deoarece $\dfrac{MN}{CM} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AN}{MA}$, iar triungiurile sunt dreptunghice) | 1p |
| Rezultă $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle ANM$ , de unde concluzia. | 1p |
| Total punctaj problema 4 | **7 p** |

**Olimpiada de matematică**
**Etapa locală 16.02. 2013**
**Subiect clasa a VII- a**

**Problema 1:**

a) Să se demonstreze că $2013+\sqrt{2013}<2059$.

b) Să rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2013<x^2<2059$.

c) Determinați numărul natural n astfel încât $\sqrt{2013+\sqrt{2013-n}}$ să fie număr întreg.

**Problema 2:**

Se notează cu $a$ numărul raţional $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...+\frac{1}{100^2}$ şi se consideră un număr natural $k$, $k\neq 0$. Să se demonstreze că:

a) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$;

b) $k(k+1)<(k+1)^2$;

c) $|0,99-a|<1$.

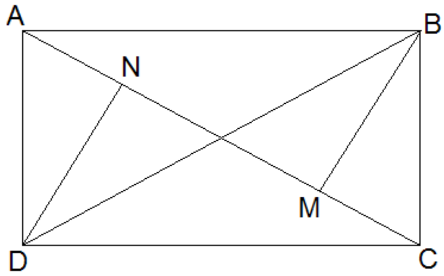
**Problema 3:**

În dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată $AB\neq BC$, $BM\perp AC$, $DN\perp AC$, $BM=2$ cm şi $AC=6$ cm.

a) Să se calculeze aria dreptunghiului *ABCD*.

b) Să se demonstreze că *BMDN* este un paralelogram.

c) Să se demonstreze că paralelogramul *BMDN* nu poate fi romb.




**Problema 4:**

Se consideră pătratul *ABCD* în care *M* este mijlocul laturii [*AB*], iar *N* un punct pe latura [*AD*] astfel ca *ND* = 3 *NA*. Să se arate că [NM este bisectoarea unghiului *ANC*.

*Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*