

1. a) $a, b, \in (0,1) \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} > 0$ și $\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab} > 0$
2p

Prin înmulțirea inegalităților se obține $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{4}(\log_a b + 1)(\log_b a + 1) = \frac{1}{4}(2 + \log_a b + \log_b a) \geq \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$
 (s-a folosit $\log_a b, \log_b a > 0$, pentru $a, b \in (0,1)$)
2p

b) Folosind inegalitatea mediilor $\frac{3abc}{ab+ac+bc} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow$
 $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq \log_a \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c)$

Analog

$$\log_b \frac{3abc}{ab + bc + ca} \geq \frac{1}{3}(1 + \log_b a + \log_b c)$$

$$\log_c \frac{3abc}{ab + bc + ca} \geq \frac{1}{3}(1 + \log_c a + \log_c b)$$

.....2p

Prin adunare și folosind $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0 \Rightarrow$ inegalitatea din enunț1p

2. a)

$$(z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1) =$$

$$z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 + z_1 + z_2 + z_3 - 1 = z_1 z_2 z_3 \left(1 - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right) + \underbrace{z_1 + z_2 + z_3 - 1}_0 = z_1 z_2 z_3 (1 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3) = z_1 z_2 z_3 (1 - \overline{z_1 + z_2 + z_3}) = z_1 z_2 z_3 (1 - 1) = 0$$

(avem $z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ și celelalte) 4p

b) Din punctul a) rezultă că cel puțin unul din numere este egal cu 1
1p

Dacă $z_1 = 1$ din $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_2 + z_3 = 0$ deci $z_1^{2013} + z_2^{2013} + z_3^{2013} = 1 + z_2^{2013} + (-z_2)^{2013} = 1$, analog cazurile $z_2 = 1$ sau $z_3 = 1$
2p

3. $20^x - 5^x - 4^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (5^x - 1)(4^x - 1) \geq 0$, adevărată deoarece pentru $x \geq 0$, $5^x - 1 \geq 0$ și $4^x - 1 \geq 0$ iar Pentru $x < 0$, $5^x - 1 < 0$ și $4^x - 1 < 0$ 2p

b) $f(x) = (5^x - 1)(4^x - 1) - 1$

Dacă $x < y \leq 0 \Rightarrow 5^x - 1 < 5^y - 1 \leq 0$ și $4^x - 1 < 4^y - 1 \leq 0$
 Prin înmulțire $(5^x - 1)(4^x - 1) > (5^y - 1)(4^y - 1) \geq 0$ deci $f(x) > f(y)$

Dacă $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq 5^x - 1 < 5^y - 1$
 $0 \leq 4^x - 1 < 4^y - 1$ și prin înmulțire $0 \leq (5^x - 1)(4^x - 1) < (5^y - 1)(4^y - 1)$ deci $f(x) < f(y)$3p

c) Dacă $x < 0$ ecuația nu are soluție deoarece $20^x < 5^x$ deci $20^x - 5^x - 4^x < 0$

Deoarece f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și $f(2) = 359$ rezultă $x = 2$ singura soluție2p
 4.

Pentru $n = 1$ avem că $f(1) = \left[\frac{f(1)}{2} \right]$ și rezultă că $f(1) \in \{-1, 0\}$, în urma calculului:

$$a = \left[\frac{a}{2} \right] \Rightarrow \frac{a}{2} - 1 < a \leq \frac{a}{2} \text{ deci } -2 < a \leq 0, a \text{ întreg deci } a \in \{-1, 0\}$$

- Dacă $f(1) = 0$ se obține că $f(2) = \left[\frac{0}{2} \right] + \left[\frac{f(2)}{3} \right] = \left[\frac{f(2)}{3} \right]$ și cu un calcul asemănător $f(2) = 0$, deci f nu este injectivă.
- Dacă $f(1) = -1$ se obține că $f(2) = \left[\frac{-1}{2} \right] + \left[\frac{f(2)}{3} \right] = -1 + \left[\frac{f(2)}{3} \right]$. Din această relație, folosind același calcul rezultă că $-3 < f(2) \leq -\frac{3}{2}$, deci $f(2) \in \{-2, -1\}$ și, din cauza injectivității, $f(2) = -2$.

Presupunem că $f(k) = -k$ și avem că

$$f(k+1) = \left[\frac{-1}{2} \right] + \left[\frac{-2}{3} \right] + \left[\frac{-3}{4} \right] + \dots + \left[\frac{-k}{k+1} \right] + \left[\frac{f(k+1)}{k+2} \right] = -k + \left[\frac{f(k+1)}{k+2} \right].$$

Din egalitatea $f(k+1) + k = \left[\frac{f(k+1)}{k+2} \right]$ se obține că $f(k+1) + k \leq \frac{f(k+1)}{k+2} < f(k+1) + k + 1$,

sau

$$(k+2)f(k+1) + k^2 + 2k \leq f(k+1) < (k+2)f(k+1) + (k+1)(k+2).$$

Din relația anterioară se obține

Barem clasa a X-a

$$(k+1)f(k+1) + k^2 + 2k + 1 \leq 1 \quad \text{și} \quad 0 < (k+1)f(k+1) + (k+1)(k+2)$$

relații din care rezultă că

$$f(k+1) \leq -k - 1 + \frac{1}{k+1} \quad \text{respectiv} \quad f(k+1) > -k - 2.$$

Astfel avem că $f(k+1) = -k - 1$

.

Așadar $f(-n) = -n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a X-a

Subiecte:

1. Fie $a, b, c \in (0,1)$. Să se demonstreze inegalitățile:
 - a) $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$
 - b) $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$
2. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 cu proprietățile $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.
 - a) Să se calculeze $(z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1)$
 - b) Să se calculeze $z_1^{2013} + z_2^{2013} + z_3^{2013}$
3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 20^x - 5^x - 4^x$
 - a) Să se arate că $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$
 - c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 359$
4. Să se determine funcțiile injective $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că

$$f(n) = \left[\frac{f(1)}{2} \right] + \left[\frac{f(2)}{3} \right] + \left[\frac{f(3)}{4} \right] + \dots + \left[\frac{f(n)}{n+1} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Burtea Marius, Alexandria, Teleorman