MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Subiecte
Clasa a XII–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.
Pe mulțimea $G = [1,\infty)$ definim legea de $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, x, y \in G$.

a) Arătați că legea este corect definită.
b) Verificați dacă legea este asociativă și determinați mulțimea elementelor inversabile în raport cu legea ” $*$ ”.
c) Considerăm mulțimea $A = \{(x, y), x, y \in \mathbb{N}^* | \, x * y \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{(x, y), x, y \in \mathbb{N}^* | \, x * y \notin \mathbb{N}\}$. Arătați că mulțimile A și B sunt infinite.

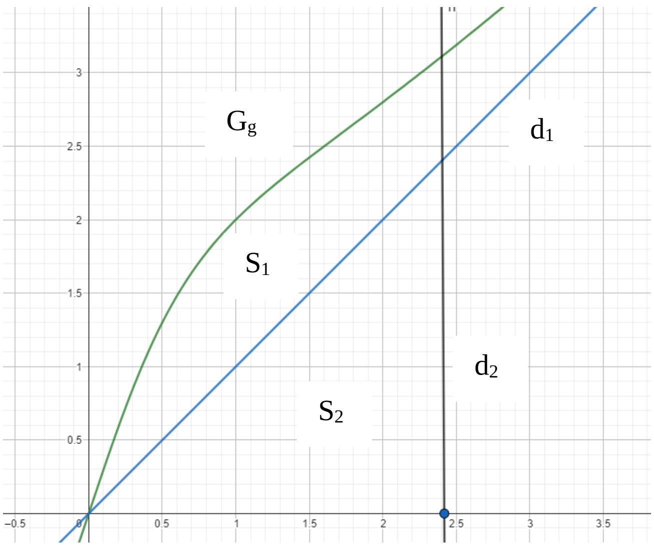
Subiectul 2.
Considerăm ecuația $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați: $S = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.
b) Arătați că ecuația dată are o singură rădăcină reală.
c) Arătați că rădăcinile din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ au partea reală în intervalul $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.
d) Demonstrați că $N = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3} \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3.
Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

a) Arătați că $\int_0^a te^t dt = ae^a - \int_0^a e^t dt$.
b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt$. Demonstrați că $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) Demonstrați că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$are loc egalitatea $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$.

Subiectul 4.
O piesă metalică este confecționată din tablă de două tipuri, aluminiu și oțel. Suprafața de aluminiu este notată cu S_1 și este delimitată de funcția $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ și dreptele $d_1: y = x, d_2: x = a, a \in \mathbb{R}, a > 1$. Suprafața de oțel este notată cu S_2 și este delimitată de axa Ox și dreptele $d_1: y = x, d_2: x = a, a \in \mathbb{R}, a > 1$, ca în figura alăturată. Piesa este bine confecționată, dacă cele două suprafețe au ariile egale.



a) Calculați în funcție de a ariile suprafețelor S_1 și S_2.
b) Fie funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2}$. Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală mai mare decât 1.
c) Determinați partea întreagă a numărului real a pentru care piesa este bine confecționată.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.