OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL I

Fie $A=\{3;9;15;...;2013\}$.

a) Arătaţi că $597 \in A$ şi $727 \notin A$.
b) Calculaţi suma elementelor din mulţimea A.
c) Arătaţi că oricare ar fi n număr natural nenul, suma primelor n elemente din A, luate în ordine crescătoare, nu este pătrat perfect.

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se compare numerele 2^{497} cu 5^{213}.
b) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.
c) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

SUBIECTUL al III-lea

Pe o tablă, într-un tabel, sunt scrise iniţial numerele $3;0;1;2$, iar la fiecare pas, se măreşte cu 4 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul de mai jos:

Numerele iniţiale	3;	**0;**	1;	2;
Pasul 1	3;	4;	**1;**	2;
Pasul 2	3;	4;	5**;**	**2;**
Pasul 3	....			

a) Determinaţi n, ştiind că la pasul n se scriu 4 numere care au suma egală cu 258.
b) După câţi paşi apare în tabel numărul 2013? Justificaţi.
c) După 2013 paşi, câte numere scrise în a $4-a$ coloană a tabelului sunt pătrate perfecte? Justificaţi!

SUBIECTUL al IV-lea

Se dau mulţimile: $A=\left\{\overline{abc} \mid \overline{abc} \text{ împărţite la } 35 \text{ dau restul } 10\right\}$ şi

$B=\left\{\overline{abc} \mid \overline{abc} \vdots 5 \text{ şi } \overline{abc} \text{ împărţite la } 7 \text{ dau restul } 3\right\}$.

a) Determinaţi cel mai mic şi, respectiv, cel mai mare element din mulţimea A.
b) Demonstraţi că $A = B$.
c) Arătaţi că oricum am alege 16 elemente din A, există 2 elemente a căror diferenţă este divizibilă cu 11.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL I

Fie $A=\{3;9;15;...;2013\}$.

a) Arătaţi că $597\in A$ şi $727\notin A$.
b) Calculaţi suma elementelor din mulţimea A.
c) Arătaţi că oricare ar fi n număr natural nenul, suma primelor n elemente din A, luate în ordine crescătoare, nu este pătrat perfect.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) Elementele mulţimii A sunt de forma $6k+3$, $k\in\mathbf{N}$ ……….1 punct
$597=6\cdot 99+3\Rightarrow 597\in A$ ……….1 punct
$727=6\cdot 121+1\Rightarrow 727\notin A$ ……….1 punct

b) $3+9+15+...+2013=(6\cdot 0+3)+(6\cdot 1+3)+...+(6\cdot 335+3)=6\cdot(1+2+...+335)+3\cdot 336=$ ....1 punct
$=6\cdot 335\cdot 336:2+1008=338688$ ……….1 punct

c) Fie $S=(6\cdot 0+3)+(6\cdot 1+3)+...+[6\cdot(n-1)+3]=6\cdot(n-1)\cdot n:2+3n=3n^2$ ……….1 punct

$\left.\begin{array}{l} S=3n^2 \\ n^2 \textit{ este pătrat perfect} \end{array}\right\}\Rightarrow$ S nu e pătrat perfect ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL II

a) Să se compare numerele 2^{497} cu 5^{213}.

b) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

c) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $2^{497} = 2^{7\cdot 71} = \left(2^7\right)^{71} = 128^{71}$ .... 1 punct

$5^{213} = 5^{3\cdot 71} = \left(5^3\right)^{71} = 125^{71}$ .... 1 punct

Concluzie: $2^{497} > 5^{213}$ .... 1 punct

b) $\left.\begin{array}{l} 10^{24} = 10^{3\cdot 8} = \left(10^3\right)^8 = 1000^8 \\ 2^{80} = 2^{10\cdot 8} = (2^{10})^8 = 1024^8 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^{24} < 2^{80}$ .... 1 punct

$\left.\begin{array}{l} 2^{80} = 2^{16\cdot 5} = (2^{16})^5 = 65536^5 \\ 10^{25} = 10^{5\cdot 5} = (10^5)^5 = 10000^5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{80} < 10^{25}$ ....1 punct

c) $A = 2^{320} \cdot 5^{240} = 2^{80} \cdot 2^{240} \cdot 5^{240} = 2^{80} \cdot 10^{240}$ .... 1 punct

Conform subpunctului **a)** $10^{24} < 2^{80} < 10^{25} \Rightarrow 10^{24} \cdot 10^{240} < 2^{80} \cdot 10^{240} < 10^{25} \cdot 10^{240}$

Avem $10^{264} < A < 10^{265}$, deci A are 265 cifre .... 1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL III

Pe o tablă, într-un tabel, sunt scrise iniţial numerele $3;0;1;2,$ iar la fiecare pas, se măreşte cu 4 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul de mai jos:

Numerele iniţiale	3;	**0;**	1;	2;
Pasul 1	3;	4;	**1;**	2;
Pasul 2	3;	4;	5;	**2;**
Pasul 3	....			

a) Determinaţi n, ştiind că la pasul n se scriu 4 numere care au suma egală cu 258.
b) După câţi paşi apare în tabel numărul 2013? Justificaţi.
c) După 2013 paşi, câte numere scrise în a $4-a$ coloană a tabelului sunt pătrate perfecte? Justificaţi!

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) Suma numerelor iniţiale este 6

După fiecare pas suma numerelor este cu 4 mai mare decât suma numerelor anterioare .... 1 punct
După n paşi suma noilor numere va fi $S=6+4n$ .... 1 punct
$S=258 \Rightarrow 4n+6=258 \Rightarrow 4n=252 \Rightarrow n=63$ .... 1 punct

b) La pasul p_i noul număr care apare este $i+3$ ....1 punct
$i+3=2013 \Rightarrow i=2010$, deci 2013 apare la pasul 2012 .... 1punct

c) Pe coloana a 4-a apar doar numere de forma $4k+2$, $k \in \mathbf{N}$ .... 1 punct
Deci nu există pătrate perfecte pe coloana a 4-a .... 1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

SUBIECTUL IV

Se dau mulţimile: $A=\left\{\overline{abc}\ \middle|\ \overline{abc}\ \text{împărţite la } 35 \text{ dau restul } 10\right\}$ şi

$$B=\left\{\overline{abc}\ \middle|\ \overline{abc}\,\vdots\,5 \text{ şi } \overline{abc} \text{ împărţite la } 7 \text{ dau restul } 3\right\}.$$

a) Determinaţi cel mai mic şi, respectiv, cel mai mare element din mulţimea A.
b) Demonstraţi că $A=B$.
c) Arătaţi că oricum am alege 16 elemente din A, există 2 elemente a căror diferenţă este divizibilă cu 11.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $115=35\cdot 3+10\Rightarrow$ 115 este cel mai mic element din mulţimea A ……. 1 punct
$990=35\cdot 28+10\Rightarrow$ 990 este cel mai mare element din mulţimea A ……. 1 punct

b) Fie $\left.\begin{array}{l}\overline{abc}\in A\Rightarrow\overline{abc}=35k+10=5(7k+2)\,\vdots\,5\\ \overline{abc}\in A\Rightarrow\overline{abc}=35k+10=7(5k+1)+3\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{abc}\in B\Rightarrow A\subseteq B$ .... 1 punct

Fie $\overline{abc}\in B\Rightarrow\ \overline{abc}=5k \text{ şi } \overline{abc}=7p+3\Rightarrow 5k=7p+3\Rightarrow 5k=5p+2p+3\Rightarrow (2p+3)\,\vdots\,5$

$2p+3=5t\Rightarrow 2p+2=4t+t-1\Rightarrow (t-1)\,\vdots\,2\Rightarrow t=2n+1\Rightarrow\overline{abc}=35n+10\in A\Rightarrow B\subseteq A$

Cum $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A\Rightarrow A=B$ ……… 1 punct

c) Construim submulţimile $A_1=\{35\cdot 3+10\}, A_2=\{35\cdot 4+10\}, A_3=\{35\cdot 5+10\}, A_4=\{35\cdot 6+10\}$,
$A_5=\{35\cdot 7+10;35\cdot 18+10\}, A_6=\{35\cdot 8+10;35\cdot 19+10\},..., A_{15}=\{35\cdot 17+10;35\cdot 28+10\}$ 1punct

Aplicând principiul cutiei, printre cele 16 elemente vom găsi două elemente din mulţimea A_5 sau A_6 sau A_7 .... sau A_{15} .... 1 punct

Diferenţa acestor două numere este divizibilă cu 11 .... 1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.