Şimleu Silvaniei, 17 Decembrie, 2022

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a XV-a

CLASA A XI-A - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, demonstraţi că $(AB - BA)^2 = O_2$ dacă şi numai dacă $\det(A - B)\det(A + B) = \det(A^2 - B^2)$.

Mihai Opincariu

Soluţie.
Folosim relaţia $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ pentru $X = A^2 - B^2$ şi $Y = AB - BA$ şi avem:

$$\det(A - B)\det(A + B) = \det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA).$$

...3p

Dacă $(AB - BA)^2 = O_2$, atunci avem $\det(AB - BA) = 0$, de unde $\det(A - B)\det(A + B) = \det(A^2 - B^2)$. ...2p
Dacă $\det(A - B)\det(A + B) = \det(A^2 - B^2)$, atunci $\det(AB - BA) = 0$, iar cum $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$, din teorema Cayley-Hamilton avem $(AB - BA)^2 = O_2$.
...2p

Problema 2. Se consideră şirurile de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ pentru care:

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2},\ n = 1, 2, \ldots$$

Să se arate că şirul $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\geq 1}$ este descrescător, şirul $\left(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}\right)_{n\geq 1}$ este crescător şi să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Dorin Andrica

Soluţie.

Deoarece (a_n) şi (b_n) sunt şiruri de numere naturale, avem şi relaţia:

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n,$$

...1p

de unde obţinem:

$$b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2},$$

deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător spre ∞. ...1p

În plus, avem:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2 + (-1)^n \frac{1}{b_n^2}. \quad (*)$$

...3p (2p+1p)

Folosind această relaţie şi faptul că $(b_n)_n$ este strict crescător, avem că şirul $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\geq 1}$ este descrescător, în timp ce şirul $\left(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}\right)_{n\geq 1}$ este crescător. ...1p

De asemenea, din $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ şi $(*)$, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

...1p

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile, cu proprietatea că $AB = -BA$.
a) Demonstraţi că n este par.
b) Determinaţi toate numerele complexe a, b, c, d, e pentru care:

$$aI_n + bA + cB + dAB + eBA = O_n.$$

Vlad Mihaly

Soluţie.

a) Prin trecere la determinanți obținem rapid că $\det(AB) = (-1)^n \det(BA)$, de unde, cum $\det(AB) = \det(BA) \neq 0$, avem n par. ...1p

b) Demonstrăm că $a = b = c = 0$ şi $d = e$ arbitrare.

Din $AB = -BA$ obţinem că $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = 0$. Mai mult, avem $A = -BAB^{-1}$, de unde rezultă rapid că $\mathrm{Tr}(A) = 0$, şi, analog, $\mathrm{Tr}(B) = 0$.

Prin trecere la urmă în relaţia dată avem $a = 0$. ...2p

Înmulţind relaţia cu A^{-1} la stânga, avem:

$$bI_n + cA^{-1}B + dB + eA^{-1}BA = O_n.$$

...1p

Din $AB = -BA$ avem $BA^{-1} = -A^{-1}B$, de unde avem $\mathrm{Tr}(A^{-1}B) = 0$. Trecând acum la urmă în ultima relaţie obţinută, avem $b = 0$. Analog avem şi $c = 0$. ...2p

Aşadar avem $dAB + eBA = O_n$, adică $(d - e)AB = O_n$. Cum A şi B sunt inversabile, avem $d = e$. ...1p

Problema 4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{nx_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - \sqrt{2\ln n}) = 0$.

Dan-Ştefan Marinescu

Soluţie.

a) Din $x_{n+1} - x_n > 0$ avem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător, deci are limită care este strict mai mare decât 0 şi rezultă rapid că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. ...1p

Folosim acum criteriul Stolz-Cesaro şi obţinem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{2\ln n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2x_n^2}\right) = 1.$$

...2p

b) Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - \sqrt{2\ln n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2\ln n}{x_n + \sqrt{2\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2\ln n}{\sqrt{2\ln n}\left(1 + \frac{x_n}{\sqrt{2\ln n}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2\ln n}{\sqrt{2\ln n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - 2\ln n + x_n - x_{n+1}^2}{\sqrt{2\ln n}}.$$

...1p

Putem acum telescopa şi avem:

$$x_{n+1}^2 - 2\ln n = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}^2 - x_k^2) + x_1^2 - 2\ln n = x_1^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2x_k^2},$$

...1p

care este o cantitate mărginită, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\in\mathbb{R}$, iar din monotonia lui (x_n) avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2x_k^2}<\frac{1}{x_1^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{2}{x_0^2}.$$

...1p

Folosind acest rezultat, avem:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{2\ln n})=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-x_{n+1}^2}{\sqrt{2\ln n}}=0,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2-x_{n+1}^2)=0$. ...1p