Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a VIII-a

1.a) Arătați că produsul succesorilor a două pătrate perfecte se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte.

b) Folosind eventual punctul a) arătați că $(a^2+1)(b^2+1) \geq 2(ab-1)(a+b)$ oricare ar fi $a, b \in N^*$.

prof. Adrian BUD – Liceul Teoretic Negrești Oaș

2. Fie numerele $a, b, c \in R_+^*$. Demonstrați inegalitățile $\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{a^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\frac{a^{2016}+b^{2016}}{c^{3024}}+\frac{b^{2016}+c^{2016}}{a^{3024}}+\frac{c^{2016}+a^{2016}}{b^{3024}} \geq 2\left(\frac{1}{a^{1008}}+\frac{1}{b^{1008}}+\frac{1}{c^{1008}}\right)$.

prof. Petru BRAICA – Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil”

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime a. Notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB, BC respectiv CC'.

a) Notând cu Q simetricul punctului N față de P și R mijlocul muchiei C’D’, arătați că MNQR este paralelogram.

b) Dacă $d=(MNP) \cap (A'B'C')$, aflați distanța de la B la d.

prof. Delia OLARI – Şcoala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Apa

4. Se consideră piramida VABCD cu ABCD un patrulater convex. Se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AB, BC, CD respectiv DA și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC, VCD respectiv VDA.

a) Arătați că G_1G_2PQ este trapez.

b) Demonstrați că dreptele MG_3, NG_4, PG_1 si QG_2 sunt concurente.

Prelucrare SGM 1/2016

BAREM de corectare

1. a)	$(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2+a^2+b^2+1 =$ $(a^2b^2-2ab+1)+(a^2+b^2+2ab)$ $=(ab-1)^2+(a+b)^2$	**4p**
b)	$(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2+(a+b)^2$ $\geq 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2} =$ $= 2(ab-1)(a+b)$	**3p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2. a)	Se aduce la numitor comun în fiecare membru al inegalității. Se obține $\frac{a^5+b^5}{a^3b^3} \geq \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow a^5+b^5 \geq a^2b^2(a+b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^5+b^5 \geq a^3b^2+a^2b^3 \Leftrightarrow a^5-a^3b^2+b^5-a^2b^3 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^3-b^3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2) \geq 0$	**4p**
b)	Se notează $a^{1008}=x$, $b^{1008}=y$, $c^{1008}=z$. Relația devine $\frac{x^2+y^2}{z^3}+\frac{y^2+z^2}{x^3}+\frac{z^2+x^2}{y^3} \geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ Folosind a), avem $\frac{x^2}{y^3}+\frac{y^2}{x^3} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{y^2}{z^3}+\frac{z^2}{y^3} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}$; $\frac{x^2}{z^3}+\frac{z^2}{x^3} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{z}$ prin adunare membru cu membru se obține relația cerută.	**3p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3. a)	Se arată succesiv că: $BNQC'$paralelogram $\Longrightarrow \begin{cases} QN \parallel BC' \\ QN = BC' \end{cases}$ $BC'RM$paralelogram $\Longrightarrow \begin{cases} MR \parallel BC' \\ MR = BC' \end{cases}$	**3p**

b)	De unde $\Longrightarrow \begin{cases} MR \parallel QN \\ MR = QN \end{cases}$ adica MNQR este paralelogram. Din a) rezulta ca $d = RQ$. Notam $\{S\} = RQ \cap A'D' \Longrightarrow$ S este mijlocul lui $A'D'$ distanta de la B la d este distanta de la B la SR, inaltimea triunghiului isoscel BRS. distanta de la B la d este egala cu $\frac{a\sqrt{34}}{4}$.	4p
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4. a)	$\begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ MN \parallel AC \parallel PQ \end{cases} \Longrightarrow G_1G_2 \parallel PQ$ Deoarece $G_1Q \nparallel G_2P$ rezulta ca G_1G_2PQ este trapez.	3p
b)	Din a) $\Longrightarrow \frac{G_1G_2}{PQ} = \frac{2}{3}$ Daca $G_1P \cap G_2Q = \{O_1\} \Longrightarrow \frac{G_2O_1}{O_1Q} = \frac{2}{3}$ (1). Analog G_2G_3QM este trapez. Daca $G_2Q \cap G_3M = \{O_2\} \Longrightarrow \frac{G_2O_2}{O_2Q} = \frac{2}{3}$ (2). Din (1) si (2) $\Longrightarrow O_1 = O_2 \Longrightarrow$ MG_3, PG_1si QG_2 sunt concurente. Analog NG_4, PG_1si QG_2 sunt concurente, deci MG_3, NG_4, PG_1si QG_2 sunt concurente.	4p
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**