Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a IX-a

Subiecte:

1. Să se determine $x \in \mathbb{N}^*$ care verifică relația $\left[\sqrt{x}\right] = \frac{2015 - x}{x}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

2. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

   a) În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1,}$ $a_n = 2n + 1,$ termenii care sunt pătrate perfecte au rangurile numere pare.

   b) În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1,}$ $a_n = 6n - 5,$ termenii care sunt pătrate perfecte au rangurile numere impare.

   c) Există progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1,}$ de numere naturale nenule, cu $a_1 = 2015$ și termenii pătrate perfecte pare au rang impar.

3. Fie $ABCD$ un pătrat, O intersecția diagonalelor și M un punct în interiorul său. Punctele P, Q, R, S sunt proiecțiile punctului M pe laturile $(AB), (BC), (CD)$ respectiv (DA). Arătați că:

   a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\,\overrightarrow{MO}$.

   b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = 2\,\overrightarrow{MO}$.

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $AM = 2MD$ și $BN = 2NC$. Dacă P este un punct în plan cu proprietatea $\overrightarrow{MP} = 2\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{DC}$, arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a IX-a

1. $[\sqrt{x}] = \frac{2015}{x} - 1$ deci $\frac{2015}{x} \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{N}^*$ rezultă x divizor al lui 2015 ....$2p$

Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Prin verificări se constată că dintre divizori verifică $x = 5 \cdot 31 = 155$. Deci $x = 155$ ....$5p$

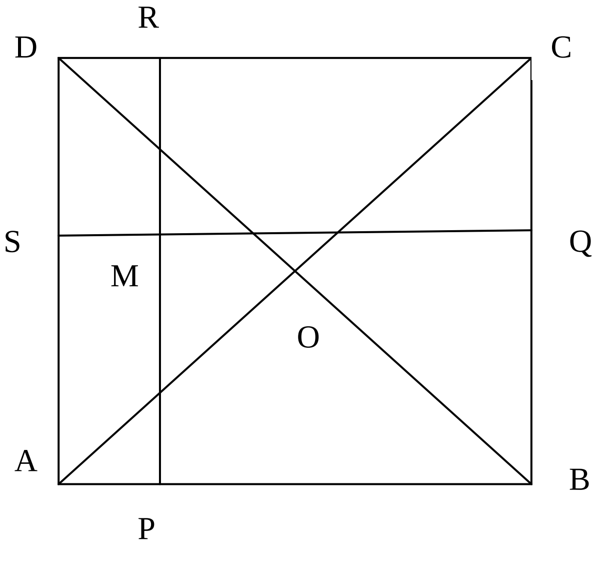
2. a) $a_n = 2n + 1$ este pătrat perfect, va rezulta că este pătratul unui număr impar. Dacă $2n + 1 = (2k+1)^2, k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $n = 2k^2 + 2k$, care este număr par, deci propoziția este adevărată...$3p$

b) Dacă $6n - 5 = p^2$, p $\in \mathbb{N}$, va rezulta că p este impar, de forma $p = 6k + 1$ sau $p = 6k + 5$ deoarece $(6k+3)^2 = 6q + 9 = 6(q+1) + 3, q \in \mathbb{N}$, iar $(6k+1)^2 = 6t + 1 = 6(t+1) - 5$, $(6k+5)^2 = 6r + 25 = 6(r+5) - 5$.

Pentru $p = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$, se obține $6n - 5 = (6k+1)^2$ de unde rangul n este $n = 6k^2 + 2k + 1$, care este impar ....
Pentru $p = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ se obține $6n - 5 = (6k+5)^2$, de unde $n = 6k^2 + 10k + 5$ care este număr impar. Așadar propoziția este adevărată...........$2p$

c) Dacă am avea $a_{2s-1} = (2p)^2$, ar rezulta $\underbrace{2015 + (2s-2)}_{impar} r = \underbrace{(2k)^2}_{par}$, fals, deci propoziția este falsă..$2p$

3.

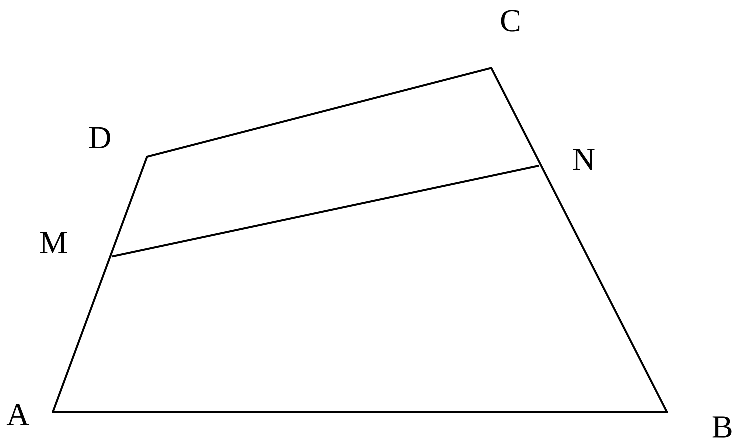


a)
$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$

Prin adunarea acestor egalități, ținând cont de relațiile
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ și
$\vec{O}B + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
rezultă relația. ......$3p$

b) Se formează dreptunghiurile $MSDR$ și $MPBQ$. Rezultă $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MD}$, deci $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right) = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{MO}$..................................$4p$

4.



Rezultă:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$ ....$3p$

Deci $2\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{DC} = \left(2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NB}\right) + \left(4\overrightarrow{DM} + 4\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{NC}\right) = \left(2\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{DM}\right) + 6\overrightarrow{MN} + \left(2\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC}\right) = 6\overrightarrow{MN}$, deoarece $2\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{DM} = 2\left(\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DM}\right) = \vec{0}$ și $2\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = 2\left(\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC}\right) = \vec{0}$

Rezultă $\overrightarrow{MP} = 6\overrightarrow{MN}$, deci punctele M, N, P sunt coliniare..................$4p$

Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.