OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Fie şirul de numere naturale $1, 4, 7, ..., 2014, ...$
   (a) Să se cerceteze dacă numerele 826 şi 2466 sunt termeni ai şirului.
   (b) Să se determine numerele de trei cifre din şir care se măresc de şase ori dacă li se adaugă o cifră în faţă.

Aurel Aldea

2. (a) Determinaţi numărul natural n pentru care $401 \cdot 401^3 \cdot 401^5 \cdot ... \cdot 401^{401} = 401^{n^2}$.
   (b) Pentru n determinat la punctul (a), aflaţi restul împărţirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100 - 31$ la n.
   (c) Pentru n determinat la punctul (a), arătaţi că n^{2015} se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Dorina Bocu

3. Aflaţi numerele naturale nenule $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care suma $S = 2^n + 4^n + 6^n + ... + 1888^n$ nu este divizibilă cu 10.

Sorina Stoian

4. Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel: $\{1\}$, $\{3, 5\}$, $\{7, 9, 11\}$, $\{13, 15, 17, 19\}$, ...
   (a) Aflaţi care este primul număr din cea de a 2014-a submulţime.
   (b) Există o submulţime de acest tip care începe cu 2013? Justificaţi răspunsul.

Gazeta Matematică 10/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

SOLUŢII - BAREME DE NOTARE

Clasa a V-a

1. *Fie şirul de numere naturale* $1, 4, 7, ..., 2014, ...$
(a) Să se cerceteze dacă numerele 826 şi 2466 sunt termeni ai şirului.
(b) Să se determine numerele de trei cifre din şir care se măresc de şase ori dacă li se adaugă o cifră în faţă.
Soluţie.
(a) Numerele din şir sunt de forma $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$. **(1p)**
Cum $826 = 3 \cdot 275 + 1$, el face parte din şir, dar $2466 = 3 \cdot 821 + 3$ nu face parte din şir. **(2p)**
(b) Fie $\overline{abc}$ numărul de 3 cifre căutat. Căutăm $\overline{dabc} = 6 \cdot \overline{abc}$, adică $1000 \cdot d + \overline{abc} = 6 \cdot \overline{abc}$. **(1p)**
Rezultă $1000 \cdot d = 5 \cdot \overline{abc}$, $200 \cdot d = \overline{abc}$, $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ şi numerele corespunzătoare sunt 200, 400, 600, 800. **(2p)**
Doar 400 este termen al şirului. **(1p)**

2.
(a) Determinaţi numărul natural n pentru care $401 \cdot 401^3 \cdot 401^5 \cdot ... \cdot 401^{401} = 401^{n^2}$.
(b) Pentru n determinat la punctul (a), aflaţi restul împărţirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100 - 31$ *la n.*
(c) Pentru n determinat la punctul (a), arătaţi că n^{2015} *se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.*
Soluţie.
(a) $401 \cdot 401^3 \cdot 401^5 \cdot ... \cdot 401^{401} = 401^{n^2} \iff 401^{1+3+5+...+401} = 401^{n^2} \iff 401^{201^2} = 401^{n^2}$, $n^2 = 201^2$, $n = 201$. **(3p)**
(b) $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100 - 31 = 201 \cdot k - 201 + 170 = 201 \cdot c + 170$, deci restul împărţirii lui a la n este 170. **(2p)**
(c) $201^{2015} = 201 \cdot 201^{2014} = (196+4+1) \cdot \left(201^{1007}\right)^2 = \left(14 \cdot 201^{1007}\right)^2 + \left(2 \cdot 201^{1007}\right)^2 + \left(201^{1007}\right)^2$. **(2p)**

3. *Aflaţi numerele naturale nenule* $n \in \mathbb{N}^*$, *pentru care suma* $S = 2^n + 4^n + 6^n + ... + 1888^n$ *nu este divizibilă cu 10.*
Soluţie.

$$U(2^n) = \begin{cases} 6, & n = 4k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ 2, & n = 4k+1 \\ 4, & n = 4k+2 \\ 8, & n = 4k+3 \quad \textbf{(1p)} \end{cases}$$

$$U(4^n) = \begin{cases} 6, & n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ 4, & n = 2k+1 \quad \textbf{(1p)} \end{cases}$$

$$U(6^n) = 6, \qquad k \in \mathbb{N}^* \qquad \textbf{(1p)}$$

$$U(8^n) = \begin{cases} 6, & n = 4k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ 8, & n = 4k+1 \\ 4, & n = 4k+2 \\ 2, & n = 4k+3 \quad \textbf{(1p)} \end{cases}$$

Prin urmare,

$$U(S) = U(2^n + 4^n + 6^n + 8^n) = \begin{cases} 4, & n = 4k \qquad k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & n = 4k+1 \\ 0, & n = 4k+2 \\ 0, & n = 4k = 3 \qquad (\mathbf{1p}) \end{cases}$$

Numerele căutate sunt de forma $n = 4k$, $k \in N^*$.

4. *Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel:* $\{1\}$, $\{3, 5\}$, $\{7, 9, 11\}$, $\{13, 15, 17, 19\}$, $\dots$.
(a) Aflaţi care este primul număr din cea de a 2014-a submulţime.
(b) Există o submulţime de acest tip care începe cu 2013? Justificaţi răspunsul.
Soluţie.
(a) $A_1 = \{1\}$. $A_2 = \{3, 5\}$ suma elementelor mulţimii este $3 + 5 = 8 = 2^3$.
$A_3 = \{7, 9, 11\}$ suma elementelor mulţimii este 3^3, $A_4 = \{13, 15, 17, 19\}$ suma elementelor mulţimii este 4^3. **(2p)**
Primul număr al mulţimii A_1 este $0 \cdot 1 + 1$, primul număr al mulţimii A_2 este $1 \cdot 2 + 1 = 3$, primul număr al mulţimii A_2 este $2 \cdot 3 + 1 = 7$, iar primul număr al mulţimii A_{2014} este $2013 \cdot 2014 + 1$. **(2p)**
(b) Primul număr al mulţimii A_n este $(n-1) \cdot n = 2 \cdot 2 \cdot 503 = 4 \cdot 503$ şi nu poate fi scris ca un produs de numere consecutive.