MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
CLASA A IX-A (M_1 4 ore)

– ETAPA LOCALĂ –18.02.2016 –

SUBIECTE

1. a) Demonstraţi că $\frac{2a}{ab+1} \le \sqrt{\frac{a}{b}}$ pentru orice $a,b \in (0, \infty)$.

   b) Dacă $a,b,c > 0$ astfel încât $abc = 1$, demonstraţi că
   $$\frac{2a}{ab+1} + \frac{2b}{bc+1} + \frac{2c}{ac+1} \le a\sqrt{\mathrm{c}} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}$$

2. a) Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

   b) Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N},\ n \ge 2$.

3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real *x*, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real *x*.

4. În triunghiul *ABC* se consideră punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ astfel încât $AM = BN = CP$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *AMP*, *BMN*, respectiv *CNP*, să se arate că triunghiurile *ABC* şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

(G.M., 2012)

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de trei ore.
Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.