Olimpiada Naţională de Matematică
Clasa a VIII-a, etapa locală
16.02.2013

1. Determinaţi numerele întregi x şi y pentru care $x^2 - 5^y = 8$

Ovidiu Bădescu, RMCS Nr.40/2012

2. a) Calculaţi: $S = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Arătaţi că $\sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + ... + \sqrt{n(n+1)} < n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Laurenţiu Panaitopol, RMCS Nr.39/2012

3. Fie *A*,*B*,*C*,*D*, patru puncte necoplanare astfel încât unghiurile *ABC*, *ABD*, *ACB*, *ACD*, *ADC*, *ADB* sunt ascuţite.

Să se arate că dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$, atunci $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ADB$.

Marius Şandru , Reşiţa

4. În paralelipipedul dreptunghic *ABCDA'B'C'D'* notăm cu *M*, *N*, respectiv *P* proiecţiile punctului *C* pe dreptele *AB'*, *AD'* respectiv *B'D'*.

Demonstraţi că dreptele *AP*, *B'N* şi *D'M* sunt concurente.

GM Nr.3/2012

Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Barem de corectare şi notare
Clasa a VIII-a, etapa locală
16.02.2013

1. Ecuaţia este echivalentă cu $x^2 - 8 = 5^y$

$\left.\begin{array}{l} x \in Z \Rightarrow x - 8 \in Z \text{ şi deci } 5^y \in Z \\ \text{dar } y \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow y \in N$ 1p

$U_c(8 + 5^y) = 3$ $oricare\ ar\ fi\ \ y \in N^*$ ....2 p

Ecuaţia dată este imposibilă $oricare\ ar\ fi\ \ y \in N^*$ ....1 p

Dacă $y = 0$ atunci $\left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \{-3,3\}$ ....2 p

Finalizare, $(x, y) \in \{(-3,0);(3,0)\}$ ....1 p

2. a) Se arată că $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ....2 p

Prin scrierea fiecărui termen al sumei de această formă şi însumarea lor se obţine

$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ....1 p

Finalizare $S = \frac{n - \sqrt{n+1}+1}{n+1}$ ....1 p

b) Se foloseşte inegalitatea mediilor pentru fiecare termen al sumei,
$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, $oricare\ ar\ fi$ a,b $\geq 0,\ \ a \neq b$...1 p

Prin însumare se arată că $S < 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \frac{n}{2}$....................................1 p

Finalizare, $S < n(n+1),\ oricare\ ar\ fi\ n\ \in N^*$ ....1 p

3. Figura ....1 p

Se arată că înălţimile din A ale feţelor laterale ale piramidei ABCD cu vârful în A sunt congruente ....3 p

Dacă $AN \perp CD, N \in (CD)$ şi $AP \perp BD,\ P \in (BD)$,
se arată că $\Delta AND \equiv \Delta APD$ ....2 p

Finalizare ....1 p

4. Figura ....1 p
   Se arată că $BM \perp AB'$, $DN \perp AD'$, $C'P \perp B'D'$ ....3 p
   În $\Delta AB'D'$ se demonstrează că $\frac{AM}{B'M} \cdot \frac{B'P}{D'P} \cdot \frac{D'N}{AN} = 1$ ....2 p
   Finalizare, folosind reciproca teoremei lui CEVA..1 p

Notă: Orice altă soluţie echivalentă se notează corespunzător.