INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IALOMIȚA
Str. Lacului Nr. 19,SloboziaIalomița
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada de matematică

Etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a V-a

1. Se dau numerele naturale:

$a = 2\cdot(1 + 2 + 3 + . . . + 2016) – 2016;$

$b = 1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot3\cdot4 + . . . + 1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot2016.$

Arătati că:

a) a este pătrat perfect;

b) b nu este pătrat perfect.

2. Fie numărul natural $X =1 + 2 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^{2015}$.

a) Aflați ultima cifră a lui 2^{2016} .

b) Arătați că $X = 2^{2016} – 1$.

c) Arătați că X este un număr natural divizibil cu 7.

3. La un magazin au fost aduse bomboane cu 13 lei/Kg în 50 de cutii de 10 Kg și 13 Kg. Câte cutii sunt de 10 Kg, dacă după vânzarea bomboanelor s-au încasat 7007 lei?

4. Suma a trei numere naturale este 3053. Dacă împărțim primul număr la jumătatea celui de al doilea obținem câtul 3 şi restul 5, iar dacă împărțim al treilea număr la sfertul celui de al doilea obținem câtul 5 şi restul 3.

Aflați numerele.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IALOMIȚA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozialalomița
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Barem de corectare și notare

Olimpiada de matematică, etapa locala, 21 februarie 2016

Clasa a V-a

Notă : Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se notează cu punctajul corespunzător.

2. Se dau numerele naturale:

$a = 2\cdot(1 + 2 + 3 + . . . + 2016) – 2016$;

$b = 1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot3\cdot4 + . . . + 1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot2016$.

Arătati că:

b) a este pătrat perfect;

b) b nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) Folosim formula $1 + 2 + 3 + . . . + n = [n \cdot (n + 1)] : 2$ . . . 1p

$a = 2016 \cdot 2017 – 2016$ 1p

$a= 2016 (2017 – 1)$ 1p

Finalizare: $a = 2016^2$ = p. p. 1p

b) Dacă un număr natural se termină cu una din cifrele 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect. 1p

Scriem încă un termen al lui b și obținem:

$b = 1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 . . . + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot \ldots \cdot2016$. 1p

Finalizare: $u(b) = u(1 + 2 + 6 + 4 + 0 + . . . +0) = 3$, deci b nu este p. p. 1p

Total: 7p

2. Fie numărul natural $X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015}$.

a) Aflați ultima cifră a lui 2^{2016} .

b) Arătați că $X = 2^{2016} - 1$.

c) Arătați că X este un număr natural divizibil cu 7.

Soluție:

a) Dacă baza se termină cu cifra 2, ultima cifră a puterilor se repetă din 4 în 4. . . . . 1p

Finalizare: $u(2^{2016}) = u(2^{4\cdot 504}) = u(2^4) = u(16) = 6$ . . . 1p

b) Avem: $2X = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016}$ 1p

Adunăm 1 în fiecare membru al egalității de mai sus și obținem:

$2X + 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016}$ 1p

Cum $X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015}$, egalitatea de mai sus devine:

$2X + 1 = X + 2^{2016}$, deci $X = 2^{2016} - 1$. 1p

c) Observăm că: $1 + 2 + 2^2 = 7$ și că X are 2016 termeni, deci putem să-i grupăm câte trei, pentru că 2016 3 . . . . 1p

Avem: $X = (1 + 2 + 2^2) + (2^3 + 2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015}) =$

$= (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{2013}(1 + 2 + 2^2) =$

$= 7\cdot(1 + 2^3 + \ldots + 2^{2013})$, deci X 7, pentru că unul din factorii produsului este 7. . . . . 1p

Total: 7p

3. La un magazin au fost aduse bomboane cu 13 lei/Kg în 50 de cutii de 10 Kg și 13 Kg. Câte cutii sunt de 10 Kg, dacă după vânzarea bomboanelor s-au încasat 7007 lei?

Soluție:

Mai întâi aflăm câte kilograme de bomboane s-au cumpărat:

7007 lei : 13 lei/Kg = 539 Kg 1p

Folosim metoda falsei ipoteze:

Presupunem că sunt numai cutii de 10 Kg 1p

Greutatea totală ar fi $50 \cdot 10$ Kg = 500 Kg 1p

Avem 539 Kg – 500 Kg = 39 Kg , diferența totală . . . 1p

și 13 Kg – 10 Kg = 3 Kg, diferența pentru fiecare cutie de 13 Kg . 1p

Aflăm numărul cutiilor de 13 Kg:

39 Kg : 3 Kg = 13 cutii de 13 Kg 1p

Finalizare: avem 50 – 13 = 37 cutii de 10 Kg 1p

Total: 7p

4. Suma a trei numere naturale este 3053. Dacă împărțim primul număr la jumătatea celui de al doilea obținem câtul 3 şi restul 5, iar dacă împărțim al treilea număr la sfertul celui de al doilea obținem câtul 5 şi restul 3.

Aflați numerele.

Soluție:

Notăm al doilea număr cu $4x$ 1p

Primul număr va fi $3 \cdot 2x + 5 = 6x + 5$ 1p

Al treilea număr va fi $5x + 3$ 1p

Obținem ecuația: $15x + 8 = 3053$, cu soluția $x = 203$ . . 1p

Finalizare:

Primul număr va fi $6 \cdot 203 + 5 = 1223$ 1p

Al doilea număr va fi $4 \cdot 203 = 812$ 1p

Al treilea număr va fi $5 \cdot 203 + 3 = 1018$ 1p

Total: 7p