



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Arătați că $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} \geq 6, \quad \forall a, b, c \in (0, \infty)$

b. Rezolvați inecuația $18^x + 12^x + 9^x + 3^x + 4^x + 2^x \leq 6 \cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(f(x)) + 2012 \cdot f(x) = x^{2013}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că f este injectivă.

b. Există funcții $f: (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, injective, astfel încât $f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2013$, pentru orice $x \in (1; \infty)$?

Prof. Tămăian Traian, Carei

III. Fie numerele complexe distincte a, b, c, d cu $a + b + c + d = 0$ și $|a| = |b| = |c| = |d|$. Să se arate că: a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) = 0$

b). Dacă $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{a, b, c, d\}$ și $\alpha + \beta = 0$ să se arate că a, b, c, d sunt rădăcinile ecuației $z^4 + (\alpha\beta + \gamma\delta) \cdot z^2 + \alpha\beta\gamma\delta = 0$

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Fie patrulaterul $ABCD$ inscriptibil cu laturile de lungimi a, b, c, d și diagonalele de

lungimi d_1 și d_2 . Să se demonstreze că $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq 4 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right)$.

Prof. Buth Gigel, Satu Mare
Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare

I. a. (3 puncte)

Aplicăm inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \forall x, y > 0$.

b. (4 puncte)

Folosim inegalitatea de la punctul **a.** pentru $a = 3^x, b = 2^x, c = 1$.

II. a. (3 puncte)

Luăm $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, exploatând acest lucru rezultă $x_1 = x_2$.
Deci f este injectivă.

b. (4 puncte)

Presupunem că există o astfel de funcție, apoi dând lui x valorile 2 și 4, obținem contradicția cu injectivitatea. Deci nu există funcții cu proprietatea cerută.

III.a. (4 puncte)

Notăm $|a| = r$ și avem $a \cdot \bar{a} = r^2$ și analoagele. Ținând seama de ipoteză și de acest lucru obținem $(a+c)(a+b)(b+c) = 0$, am folosit că $d = -a - b - c$, $a+b = -(c+d)$, $a+c = -(b+d)$, $b+c = -(a+d)$ și obține concluzia problemei.

b. (3 puncte)

Ecuția este echivalentă cu $(z^2 + \alpha\beta)(z^2 + \gamma\delta) = 0$. Presupunem că $\alpha = a, \beta = b$, deci $a+b = 0$, din $a+b+c+d = 0$ rezultă $c+d = 0$. Deci cele două ecuații vor avea soluțiile a și b respectiv c și d .

IV. (4 puncte)

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$ exprimând $\cos B$ și $\cos D$, apoi însumându-le cu notațiile adecvate obținem $\frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{d_1^2}$. Am ținut cont că patrulaterul este inscriptibil și că $\cos B = -\cos D$.

(3 puncte)

Analog obținem $\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{4}{d_2^2}$, apoi însumând inegalitățile se obține concluzia problemei.



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
SATU MARE



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Egalitate se obține atunci când patrulaterul este **pătrat**.