

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

22 februarie 2014

CLASA a XII-a

1. a) (3p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și (G, \cdot) un grup cu $3n+1$ elemente. Să se demonstreze că pentru orice $a \in G$, există un unic $x \in G$ astfel încât $x^3 = a^2$.

b) (4p) Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și (G, \cdot) un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Știind că funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^n$ este endomorfism al grupului, să se demonstreze că (G, \cdot) este grup abelian.

2. Fie $x \in \mathbb{Z}_{2014}$ astfel încât $x^{2014} = \hat{1}$. Arătați că $x^2 = \hat{1}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că pentru orice $\lambda > 0$, există $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq c_2$ astfel încât $f(c_1) + \lambda f(c_2) = 0$.

4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă cu $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Dacă $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata integrabilă, demonstrați că are loc inegalitatea:

$$2 \int_0^1 f(x) g(x) dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx \cdot \int_0^1 |g'(x)| dx.$$

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. a) (3p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și (G, \cdot) un grup cu $3n+1$ elemente. Să se demonstreze că pentru orice $a \in G$, există un unic $x \in G$ astfel încât $x^3 = a^2$.

b) (4p) Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și (G, \cdot) un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Știind că funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^n$ este endomorfism al grupului, să se demonstreze că (G, \cdot) este grup abelian.

Gazeta Matematică

Soluție.

$$a) \text{ord}(G) = 3n+1 \Rightarrow a^{3n+1} = e \Rightarrow a \cdot a^{3n} = e \Rightarrow a = (a^{3n})^{-1} \Rightarrow a^2 = (a^{-1})^{6n}.$$

$$\text{Pentru } x = (a^{-1})^{2n} \text{ avem } x^3 = a^2.$$

$$\text{Dacă } x^3 = a^2 \text{ și } y^3 = a^2, \text{ atunci } x^{3n} = y^{3n} \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$$

$$b) \text{ord}(G) = n^2 - n - 1 \Rightarrow x^{n^2 - n - 1} = e \Rightarrow x^{n^2 - n} = x, \forall x \in G$$

f endomorfism de grupuri $\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n, \forall x, y \in G$. Simplificând la stânga prin x și la dreapta prin y

$$\text{obținem } (yx)^{n-1} = x^{n-1} y^{n-1} \Rightarrow ((yx)^{n-1})^n = (x^{n-1} y^{n-1})^n \Rightarrow (yx)^{n^2 - n} = x^{n^2 - n} y^{n^2 - n} \Rightarrow yx = xy$$

Barem.

a) Existența	2 p
Unicitatea	1 p
b) $x^{n^2 - n} = x, \forall x \in G$	1 p
f endomorfism de grupuri $\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n, \forall x, y \in G$	1 p
Finalizare	2 p

2. Fie $x \in \mathbb{Z}_{2014}$ astfel încât $x^{2014} = \hat{1}$. Arătați că $x^2 = \hat{1}$.

Soluție.

$x^{2014} = \hat{1} \Rightarrow x \in U(\mathbb{Z}_{2014})$, adică x este element inversabil în \mathbb{Z}_{2014} . $(U(\mathbb{Z}_{2014}), \cdot)$ este grup cu $\varphi(2014)$

elemente. Cum $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ rezultă că $\varphi(2014) = 2014 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{19}\right) \left(1 - \frac{1}{53}\right) = 936$ și atunci

$x^{936} = \hat{1}$. Dar $(2014, 936) = 2$, deci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $936p + 2014q = 2$ și atunci

$$x^2 = x^{936p + 2014q} = (x^{936})^p \cdot (x^{2014})^q = \hat{1}.$$

Barem.

x este element inversabil în \mathbb{Z}_{2014}	1 p
$(U(\mathbb{Z}_{2014}), \cdot)$ este grup cu $\varphi(2014) = 936$ elemente	2 p
$x^{936} = \hat{1}$	1 p
Finalizare	3 p

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că pentru orice $\lambda > 0$, există $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq c_2$ astfel încât $f(c_1) + \lambda f(c_2) = 0$.

Ion Bursuc

Soluție.

Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă neinjectivă a lui f . Atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ astfel încât $F(a) = F(b)$.

Fie $c \in (a, b)$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ deducem că există $c_1 \in (a, c)$, $c_2 \in (c, b)$ astfel încât $F(c) - F(a) = (c - a)f(c_1)$ și $F(b) - F(c) = (b - c)f(c_2)$. Adunând aceste două relații obținem că $(c - a)f(c_1) + (b - c)f(c_2) = 0$ (1).

Fie $\lambda > 0$. Vom determina c astfel încât $b - c = \lambda(c - a) \Leftrightarrow c = \frac{\lambda a + b}{1 + \lambda} \in (a, b)$

Relația (1) devine: $(c - a)f(c_1) + \lambda(c - a)f(c_2) = 0 \Leftrightarrow f(c_1) + \lambda f(c_2) = 0$.

Barem.

F neinjectivă \Leftrightarrow există $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $F(a) = F(b)$	1 p
Obține relația (1)	3 p
Determină $c = \frac{\lambda a + b}{1 + \lambda} \in (a, b)$	2 p
Finalizare	1 p

4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă cu $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Dacă $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata integrabilă, demonstrați că are loc inegalitatea:

$$2 \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx \cdot \int_0^1 |g'(x)| dx .$$

Ion Bursuc

Soluție.

$\forall x \in (0, 1)$ avem $\int_0^x g'(t) dt = g(t) \Big|_0^x = g(x) - g(0)$

Deoarece $\int_0^1 f(x) dx = 0$, deducem că $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)[g(x) - g(0)] dx =$
 $= \int_0^1 \left(f(x) \cdot \left(\int_0^x g'(t) dt \right) \right) dx \leq \int_0^1 \left(|f(x)| \cdot \left| \int_0^x g'(t) dt \right| \right) dx \leq \int_0^1 \left(|f(x)| \cdot \left(\int_0^x |g'(t)| dt \right) \right) dx$ (1)

Similar, $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)[g(x) - g(1)] dx =$
 $= \int_0^1 \left(f(x) \cdot \left(\int_1^x g'(t) dt \right) \right) dx \leq \int_0^1 \left(|f(x)| \cdot \left| \int_1^x g'(t) dt \right| \right) dx \leq \int_0^1 \left(|f(x)| \cdot \left(\int_x^1 |g'(t)| dt \right) \right) dx$ (2)

Adunând inegalitățile (1) și (2) obținem inegalitatea din enunț.

Barem.

Demonstrează (1)	3 p
Demonstrează (2)	3 p
Finalizare	1 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.