Clasa a XI-a

1. Dacă α este un număr real oarecare, arătați că există un şir de numere reale, având oricare doi termeni distincți, convergent la α.

2. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite recurent prin $x_1 = 4, y_1 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că şirurile date sunt convergente şi determinați limitele lor.

3. Fie A o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Determinați valorile posibile ale determinantului matricei A.

b) Demonstrați că matricea $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB - BA = A$. Demonstrați că $ABA = AB^2A = O_2$.

Marian Cucoaneş, Gazeta Matematică 11/2012

Subiect elaborat de prof. Cristian Lazăr

Clasa a XI-a

1. Este suficient să considerăm şirul $x_n = \alpha + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Din prima relaţie obţinem că $y_n = 3x_{n+1} - 2x_n$, prin urmare $y_{n+1} = 3x_{n+2} - 2x_{n+1}$. Înlocuind în a doua relaţie, deducem că $6x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 0$.

Ecuaţia caracteristică a acestei recurenţe este $6r^2 - 7r + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{6}$, aşadar $x_n = A + B \cdot \frac{1}{6^n}$. Cum primii termeni sunt $x_1 = 4, x_2 = 3$, rezultă că $A = \frac{14}{5}, B = \frac{36}{5}$ şi astfel este evident că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir convergent, cu limita $\frac{14}{5}$.

Apoi, $y_n = \frac{14}{5} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{6^{n-2}}$, prin urmare şi $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, având aceeaşi limită.

3. a) Dacă adunăm prima linie la liniile 2 şi 3, pe aceste linii vor fi numai numere pare. Scoatem factor 2 de pe fiecare dintre ele şi obţinem că determinantul matricei *A*, care este număr întreg, se divide cu 4.

Însă det*A* este sumă de şase termeni, fiecare egal cu 1 sau cu -1, prin urmare are valoarea cuprinsă între -6 şi 6. Rezultă că $\det A \in \{-4, 0, 4\}$ şi se constată imediat că toate cele trei valori sunt posibile.

b) Se demonstrează uşor, prin inducţie matematică, faptul că matricea A^n are toate elementele impare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. În particular, toate elementele lui A^n vor fi nenule.

4. Cum matricele *AB* şi *BA* au aceeaşi urmă, rezultă că $trA = tr(AB - BA) = 0$. Ecuaţia caracteristică a matricei *A* conduce la $A^2 = -(\det A) I_2$, prin urmare matricea A^2 comută cu oricare altă matrice; astfel, $A^2B = BA^2$.

Înmulţind relaţia din enunţ cu *A*, la stânga, apoi la dreapta, şi ţinând seama de cele anterioare, deducem că $A^2 = -A^2$, deci $A^2 = O_2$. De aici,

$$ABA = (A + BA)A = (I_2 + B)A^2 = O_2.$$

Ridicăm acum la pătrat ambii membri ai relaţiei din enunţ; obţinem că

$$(ABA)B - AB^2A - BA^2B + B(ABA) = A^2.$$

Deoarece $ABA = A^2 = O_2$, rezultă că $AB^2A = O_2$, ceea ce încheie rezolvarea.