CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H2, filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie a și b două numere reale pozitive, astfel încât $a=b\left(9+4\sqrt{5}\right)$.

2p **a)** Arătați că $\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}\frac{a}{b}=2$.

5p **b)** Determinați numerele a și b, știind că $\frac{1}{\log_a(2+\sqrt{5})}+\frac{1}{\log_b(2+\sqrt{5})}=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $9+4\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$	**1p**
$\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}\frac{a}{b}=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}\left(9+4\sqrt{5}\right)=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}\left(2+\sqrt{5}\right)^2=2$	**1p**
b) $\frac{1}{\log_a(2+\sqrt{5})}=\log_{(2+\sqrt{5})}a \Rightarrow \frac{1}{\log_a(2+\sqrt{5})}+\frac{1}{\log_b(2+\sqrt{5})}=$ $=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}a+\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}b=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}ab$	**2p**
$\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}ab=0\Rightarrow ab=1\Rightarrow b=\frac{1}{a}$	**1p**
$a=\frac{1}{a}\left(9+4\sqrt{5}\right)\Rightarrow a^2=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ și $a>0\Rightarrow a=2+\sqrt{5}$ și $b=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$	**2p**

Enunț subiect 2:

Fie numărul complex $\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

4p **a)** Demonstrați că numărul α este soluție a ecuației $x^{2024}+x+1=0$.

3p **b)** Determinați cel mai mare număr natural n, mai mic decât 2024, pentru care $\alpha^n+\alpha^{n-2}=-1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1+3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	**1p**

$\alpha^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$	**1p**
$\alpha^{2024}=\left(\alpha^3\right)^{674}\cdot\alpha^2=\alpha^2 \Rightarrow \alpha^{2024}+\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0$, deci α este soluţie a ecuaţiei $x^{2024}+x+1=0$	**2p**
b) $\alpha^n+\alpha^{n-2}=\alpha^{n-2}\left(\alpha^2+1\right)=\alpha^{n-2}\left(-\alpha\right)=-\alpha^{n-1}$ și ecuația devine $-\alpha^{n-1}=-1 \Rightarrow \alpha^{n-1}=1$	**1p**
Întrucât $\alpha^3=1 \Rightarrow \alpha^{3k}=1$, se obține $n=3k+1,\ n\in\mathbb{N},\ n<2024 \Rightarrow$ cel mai mare număr n este 2023	**2p**

Enunț subiect 3:

7p Determinați valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2024]{m(m+3)x^2+(m+3)x+1}$ este corect definită.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Condiția de existență $m(m+3)x^2+(m+3)x+1\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
Condițiile $\Delta=(m+3)(3-3m)\leq 0$ și $m(m+3)>0$	**2p**
Rezolvarea condițiilor $m\in\left(\left(-\infty,-3\right]\cup\left[1,+\infty\right)\right)\cap\left(\left(-\infty,-3\right)\cup\left(0,+\infty\right)\right) \Rightarrow m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left[1,+\infty\right)$	**2p**
Cazul $m(m+3)=0$: $m=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt[2024]{3x+1}$ care nu poate avea domeniul de definiție $\mathbb{R}$ $m=-3 \Rightarrow f(x)=\sqrt[2024]{1}=1$ care are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
Soluția finală $m\in\left(-\infty,-3\right]\cup\left[1,+\infty\right)$	**1p**

Enunț subiect 4:

7p Determinați numerele reale a și b pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\left(-\infty,-2\right] \\ ax+b, & x\in\left(-2,1\right) \\ -x^2+1, & x\in\left[1,+\infty\right) \end{cases}$ este bijectivă.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Justificarea injectivității pe intervalele $\left(-\infty,-2\right]$ și $\left[1,+\infty\right)$	**1p**
Condiția $a\neq 0$ pentru injectivitatea pe intervalul $\left(-2,1\right)$	**1p**
Condițiile pentru bijectivitate pe $\mathbb{R}$: $f\left(\left(-\infty,-2\right]\right)\cap f\left(\left(-2,1\right)\right)=\varnothing$, $f\left(\left(-2,1\right)\right)\cap f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\varnothing$ $f\left(\left(-\infty,-2\right]\right)\cap f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\varnothing$, $f\left(\left(-\infty,-2\right]\right)\cup f\left(\left[1,+\infty\right)\right)\cup f\left(\left(-2,1\right)\right)=\mathbb{R}$	**2p**
Scrierea egalităților $\begin{cases} -2a+b=4 \\ a+b=0 \end{cases}$ și $\begin{cases} -2a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases}$	**2p**
$a=-\frac{4}{3}$ și $b=\frac{4}{3}$ sau $a=\frac{4}{3}$ și $b=\frac{8}{3}$	**1p**