Clasa a X-a

Problema 1. Să se determine numerele naturale a, b, c, d dacă $a-c=61$ şi

$$\sqrt{2\lg a-3\lg b}+\sqrt{5\lg c-6\lg d}=\left(b^3+d^6-a^2-c^5\right)^{2019}.$$

Traian Tămâian

Rezolvare. Din condiţiile de existenţă rezultă

$$a^2\geq b^3, c^5\geq d^6 \qquad (1)$$

şi $b^3+d^6\geq a^2+c^5$, adică

$$\left(a^2-b^3\right)+\left(c^5-d^6\right)\leq 0 \qquad (2) \qquad \text{(1 pct.)}$$

Din (1) şi (2) deducem că

$$a^2=b^3 \quad \text{şi} \quad c^5=d^6. \qquad (3) \qquad \text{(1 pct.)}$$

Din $a^2=b^3$ rezultă că există k, $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $a^2=b^3=x^{6k}$ de unde rezultă că există $k,x\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$a=x^{3k} \quad \text{şi} \quad b=x^{2k}. \qquad (4)$$

Din $c^5=d^6$ rezultă că există $p,y\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$c=y^{6p} \quad \text{şi} \quad d=y^{5p}. \qquad (5) \qquad \text{(1 pct.)}$$

Cum $a-c=61$, folosind (4) şi (5) avem $x^{3k}-y^{6p}=61$, adică

$$\left(x^k\right)^3=\left(y^{2p}\right)^3=61. \qquad (6) \qquad \text{(1 pct.)}$$

Notând $x^k=m$ şi $y^{2p}=n$ cu $m,n\in\mathbb{N}$, relaţia (6) se scrie $m^3-n^3=(m-n)\left(m^2+mn+n^2\right)=61$ de unde obţinem

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m^2+mn+n^2=61 \end{cases} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} m=n+1 \\ n^2+n=20. \end{cases} \qquad \text{(1 pct.)}$$

Aşadar $m=5$, $n=4$. Prin urmare,

$$x=5,\quad k=1,\quad y=2,\quad p=1. \qquad \text{(1 pct.)}$$

Cu acestea rezultă

$$a=x^{3k}=5^3=125,\qquad b=x^{2k}=5^2=25,$$
$$c=y^{6p}=2^6=64,\qquad d=y^{5p}=2^5=32,$$

numere care verifică condiţiile din enunţ.

În concluzie, numerele cerute sunt:

$$a=125,\quad b=25,\quad c=64,\quad d=32. \qquad \text{(1 pct.)}$$

Clasa a X-a

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ distincte două câte două astfel încât

$$a + b + c = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = 0.$$

Arătaţi că a, b, c reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Marian Cucoaneş şi Marius Drăgan (problema 28290 din Gazeta matematică)

Rezolvare. Relaţia $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = 0$ se scrie sub forma

$$a^3c + b^3a + c^3b = 0 \qquad \text{(1 pct.)}$$

care, deoarece $c = -(a+b)$, ne conduce la

$$\left(a^2 + b^2\right)(a+b)^2 + a^2b^2 = 0,$$

adică la

$$\left(a^2 + b^2\right)c^2 + a^2b^2 = 0 \iff a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0. \qquad \text{(1 pct.)}$$

Din

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 0,$$

deducem că

$$ab + bc + ca = 0. \quad (1) \qquad \text{(1 pct.)}$$

Relaţia (1) scrisă sub forma $a(b+c) + bc = 0$ ne conduce la $a^2 = bc$. În mod simetric $b^2 = ac$ şi $c^2 = ab$. Aşadar,

$$a^3 = b^3 = c^3 = abc, \qquad \text{(1 pct.)}$$

de unde, trecând la modul obţinem că

$$|a| = |b| = |c|. \qquad \text{(1 pct.)}$$

Pe de altă parte, din

$$a(a-b) = a^2 - ab = bc - ab = b(c-a),$$

prin trecere la modul, obţinem

$$|a||a-b| = |b||c-a|, \quad \text{deci} \quad |a-b| = |c-a|. \qquad \text{(1 pct.)}$$

În mod simetric, $|a-b| = |c-b|$, ceea ce încheie rezolvarea. (1 pct.)

Clasa a X-a

Problema 3. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ cu proprietatea că n este multiplu al lui $[\ln n]$.

Taubal Fethi

Rezolvare. Fie $p \geq 1$. Deoarece

$$e^{p+1} - e^p = (e-1)\,e^p > \frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)^p > \frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}p\right) >$$

$$> \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 p = \frac{6+9p}{4} \geq p+2,$$

deducem că în intevalul $[e^p, e^{p+1})$ există cel puţin $p+2$ numere naturale distincte. (2 pct.)

Cum în intevalul $[e^p, e^{p+1})$ există cel puţin $p+1$ numere naturale distincte, mai mari decât p, deducem că printre acestea, există cel puţin un multiplu al lui p. Aşadar, există un număr natural $n \in [e^p, e^{p+1})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ astfel încât $n = kp$. (2 pct.)

Din

$$e^p \leq n < e^{p+1},$$

deducem că

$$p \leq \ln n < p+1 \quad \text{şi deci} \quad [\ln n] = p. \quad \text{(2 pct.)}$$

Aşadar, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $n = k\,[\ln n]$.

Evident, la p diferiţi avem n diferiţi. Cum există o infinitate de numere naturale p, vor exista o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că n este multiplu al lui $[\ln n]$. (1 pct)

Clasa a X-a

Problema 4. Fie $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$. Să se arate că dacă suma numerelor reale x_1, x_2, ..., x_n este zero, atunci are loc inegalitatea

$$\left(a^{2x_1}\right)^n .a^{x_1} + \left(a^{2x_2}\right)^n .a^{x_2} + ... + \left(a^{2x_n}\right)^n .a^{x_n} \geq$$

$$\geq n\left(a^{2x_1} + a^{2x_2} + ... + a^{2x_n}\right) - (n-1)\left(a^{x_1} + a^{x_2} + ... + a^{x_n}\right);$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Dorel I. Duca

Rezolvare: Inegalitatea din enunţul problemei poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} a^{(2n+1)x_k} + (n-1)\sum_{k=1}^{n} a^{x_k} \geq n\sum_{k=1}^{n} a^{2x_k}.$$

ceea ce ne sugerează următoarea abordare a rezolvării.

Deoarece $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$, în baza inegalităţii mediilor, avem

$$a^{(2n+1)x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + ... + a^{x_n} = \frac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+...+x_n}} + a^{x_2} + a^{x_3} + ... + a^{x_n} \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{\frac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+...+x_n}}.a^{x_2}.a^{x_3}...a^{x_2}} = n\sqrt[n]{a^{2nx_1}} = na^{2x_1}, \qquad (3 \text{ pct.})$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a^{(2n+1)x_1} = a^{x_2} = a^{x_3} = ... = a^{x_n}$. (1 pct.)

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., n\}$ avem

$$a^{(2n+1)x_k} + a^{x_1} + ...a^{x_{k-1}} + a^{x_{k+1}} + ... + a^{x_n} \geq na^{2x_k},$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a^{(2n+1)x_k} = a^{x_1} = ... = a^{x_{k-1}} = a^{x_{k+1}} = ... = a^{x_n}$, adică dacă şi numai dacă $(2n+1)x_k = x_1 = ... = x_{k-1} = x_{k+1} = ... = x_n$. (1 pct.)

Adunând ultimele n inegalităţi, obţinem concluzia (1 pct.); egalitatea având loc dacă şi numai dacă

$$(2n+1)x_k = x_j, \text{ oricare ar fi } k, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

de unde deducem că $x_k = 0$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, ..., n\}$. (1 pct.)