Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Fie $A = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ -1 & -m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}^*$.

   a) Arătați că matricea $I_2 + A$ este inversabilă și inversa ei este $I_2 - A$.
   b) Arătați că nu există matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^3 = A$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $A^2 + A + I_2 = O_2$.

   a) Să se găsească o matrice care verifică relația din enunț.
   b) Să se calculeze determinantul matricei A.

3. Se dau șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+........+(1^2+2^2+3^2+......+n^2)},\ a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n\ ,$$

$b_n = \left(\frac{a_n}{12}\right)^n$. Să se determine limitele celor trei șiruri.

4. Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică neconstantă de numere naturale nenule, de rație r și se notează

$$b_n = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(a_1 x)+\sin(a_2 x)+\ldots+\sin(a_k x)}{tg(1\cdot x)+tg(3\cdot x)+\ldots+tg((2k-1)\cdot x)}\ .$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{r}{2}\ .$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a XI-a

1. a) $A^2 = O_2$……………………………………………………………………………$2p$
Proprietățile rezultă din relația:
$(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 - A^2 = I_2$……………………………………………………..$2p.$

b) Dacă ar exista o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $X^3 = A$, trecând la determinanți $\Longrightarrow (detX)^3 =$ $= detA = 0$ deci $detX = 0$. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din relația
$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)I_2 = O_2$ rezultă

$X^2 = (a+d)X$ și $X^3 = (a+d)^2X = A$ și $(a+d)^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ -1 & -m \end{pmatrix}$
Ar rezulta $\begin{cases} a(a+d)^2 = m \\ d(a+d)^2 = -m \end{cases}$ și prin adunare $(a+d)^3 = 0$,
$\begin{cases} a+d = 0 \\ X^2 = (a+d)X \end{cases}$ deci $X^2 = O_2$ și $X^3 = A = O_2$ fals, deoarece $m \in \mathbb{R}^*$……………$3p$

2. a) Considerăm o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a + d = -1$ și $ad - bc = 1$ de exemplu

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$…………………………………………………………………..$3p.$

b) $A^2 + A + I_2 = O_2$ Înmulțind relația cu $A - I_2$ va rezulta $A^3 - I_2 = O_2$ deci $A^3 = I_2$ și $det(A^3) = 1$, adică $\left.\begin{matrix} (detA)^3 = 1 \\ detA \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow detA = 1$…………………………………$4p.$

3. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots\ldots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2) = \sum_{k=1}^{n}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2)$

Folosind formulele $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ și $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, rezultă
$$\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k^3 + 3k^2 + k) = \frac{1}{6}\cdot\left[2\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right] =$$
$$\frac{n\cdot(n+1)}{12}\cdot(n^2 + n + 2n + 1 + 1) = \frac{n\cdot(n+1)}{12}\cdot(n^2 + 3n + 2) = \frac{n\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)}{12}.$$
$x_n = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot 12}{n\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)} = \frac{12}{n\cdot(n+1)}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$…………………………………………$2p.$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{12}{k\cdot(k+1)} = 12\cdot\frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 12$………………………………………$3p.$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$ ....$2p$.

4. Folosind limitele fundamentale și formulele $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{k(a_1+a_k)}{2}$ și $1 + 3 + 5 + + \cdots + (2k-1) = k^2$ rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+\ldots+\sin(a_kx)}{tg(1\cdot x)+tg(3\cdot x)+\ldots+tg((2k-1)\cdot x)} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{1+3+5+\ldots+(2k-1)} = \frac{a_1+a_k}{2k} \text{ ....} 4p.$$

Se obține că $\frac{a_1+a_k}{2k} = \frac{2a_1-r}{2k} + \frac{r}{2}$ și $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2a_1-r}{2k}+\frac{r}{2}\right) = \frac{2a_1-r}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{nr}{2}$.
....$2p$.

Cu criteriul Stolz-Cesaro se obține că $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} = 0$.

Rezultă că $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{r}{2}$ ....$1p$.

Observație. Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.