CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Comparaţi numerele: $x = 2^{222} + 2^{202}$ şi $y = 2^{221} + 2^{220} + 2^{212}$.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

În baza 2, x are 223 cifre,	**3p**
iar y are 222 cifre,	**3p**
rezultă $x>y$.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

$x = 2^{212}\cdot 1024 + 2^{202}$,	**3p**
iar $y = 2^{212}(2^9 + 2^8 + 1) = 2^{212}\cdot 769$,	**3p**
rezultă $x>y$.	**1p**

VARIANTA 3 DE NOTARE:

$x = 2^{221} + 2^{221} + 2^{202}$	**3p**
$= 2^{221} + 2^{220} + 2^{220} + 2^{202}$.	**2p**
Cum $2^{220} + 2^{202} > 2^{212}$, rezultă $x>y$.	**2p**

SUBIECTUL 2

Fie numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$.

a) Arătaţi că numărul $A + 1$ este divizibil cu 512.

b) Aflaţi restul împărţirii numărului $A - 1$ la 512.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

Calculând $2A - A = 2^{512} - 1$, rezultă $A + 1 = 2^{512}$.	**2p**
Cum $512 = 2^9$ şi $A + 1 = 2^{503}\cdot 2^9$, se obţine $A + 1$ este divizibil cu 512.	**1p**

b)

$A - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$	**1p**
$= 2 + 2^2 + \dots + 2^8 + 2^9(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{502})$	**2p**
$= 510 + 512(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{502})$, rezultă restul este 510.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

$A + 1 = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$	**1p**
$2 + 2 = 2^2$, $2^2 + 2^2 = 2^3$, … , $2^{511} + 2^{511} = 2^{512}$.	**1p**
Cum $512 = 2^9$ şi $A + 1 = 2^{503}\cdot 2^9$, se obţine $A + 1$ este divizibil cu 512.	**1p**

b)

$A - 1 = A + 1 - 2$	**1p**
$= \mathcal{M}_{512} - 2$	**1p**
$= \mathcal{M}_{512} + 510$, rezultă restul este 510.	**2p**

SUBIECTUL 3

a) Daţi un exemplu de triplet (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.

a)

Pentru un singur exemplu: (1, 25, 121) sau (25, 49, 289).	**1p**
Calculează (1+25+121):3 = 49 sau (25+49+289):3 = 121, pătrat perfect. Numai pentru unul se acordă cele 2p.	**2p**

b)

Un exemplu de forma $(k^2, 25k^2, 121k^2)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$	**2p**
Şi $(k^2 + 25k^2 + 121k^2):3=49k^2 =(7k)^2$, arată că există o infinitate de triplete (a, b, c), unde a, b, c şi (a + b + c):3 sunt patru pătrate perfecte diferite.	**2p**

SUBIECTUL 4

a) **Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}$ împărţit la $\overline{bc}$ dă câtul 3 şi restul 4.**

b) **Aflaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, ştiind că $\overline{abcd}$ împărţit la $\overline{bcd}$ dă câtul 33 şi restul 32.**

a)

$\overline{abc} = 3\cdot\overline{bc} + 4$, de unde $100a + \overline{bc} = 3\cdot\overline{bc} + 4$.	**1p**
$100a = 2\cdot\overline{bc} + 4$ sau $50a = \overline{bc} + 2$.	**1p**
Cu soluţiile: $a = 1$, $\overline{bc} = 48$ şi $a = 2$, $\overline{bc} = 98$. Numerele sunt: 148 şi 298.	**1p**

b)

$\overline{abcd} = 33\cdot\overline{bcd} + 32$,	**1p**
de unde $1000a + \overline{bcd} = 33\cdot\overline{bcd} + 32$, apoi $1000a = 32\cdot\overline{bcd} + 32$	**1p**
şi de aici $125a = 4\cdot\overline{bcd} + 4$ sau $125a = 4(\overline{bcd} + 1)$	**1p**
Cu soluţiile: $a = 4$, $\overline{bcd} = 124$ şi $a = 8$, $\overline{bcd} = 249$. Numerele sunt: 4124 şi 8249.	**1p**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi cel mai mic număr natural n, de patru cifre, ştiind că $n - 19$ este divizibil cu 28 şi $n - 31$ este divizibil cu 36.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

$n = 28k + 19$ şi $n = 36p + 31$,	**1p**
rezultă $28k + 19 = 36p + 31$,	**1p**
$28k = 36p + 12$; $7k = 9p + 3$.	**1p**
Cea mai mică valoare a lui p pentru care ecuaţia are soluţie este 2 şi atunci $p = 7q + 2$.	**1p**
Se obţine $n = 36(7q + 2) + 31 = 252q + 103$.	**2p**
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	**1p**

VARIANTA 2 DE NOTARE:

Numerele de forma $28k + 19$ sunt: 19, 47, 75, 103, ….	**2p**
Numerele de forma $36p + 31$ sunt: 31, 67, 103, ….	**2p**
Cum 103 este cel mai mic număr comun ambelor forme, rezultă $n = [28, 36]\cdot q + 103$,	**1p**
$n = 252\cdot q + 103$.	**1p**
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	**1p**

SUBIECTUL 2

Aflaţi numerele prime a, b, c, ştiind că $a + b = 380$ şi $6a + 15b + 29c = b^4$.

Din a II-a condiţie $6a$ şi $b^4 - 15b$ sunt numere pare, rezultă $29c$ este par,	**2p**
c fiind prim, de unde $c = 2$.	**2p**
După înlocuire şi cu prima relaţie se obţine $2280 + 9b + 58 = b^4$ sau $b(b^3 - 9) = 2338$.	**1p**
$b \mid 2338 = 2\cdot 7\cdot 167$. Singura valoare b, număr prim, care verifică este $b = 7$.	**1p**
Numerele sunt: $a = 373$, $b = 7$, $c = 2$.	**1p**

SUBIECTUL 3

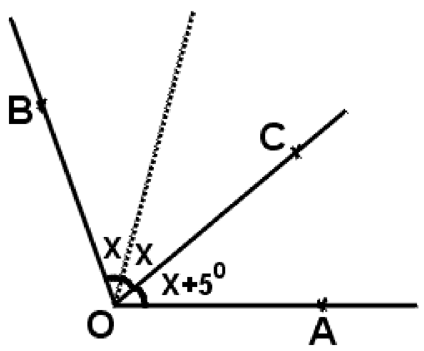
a) **Aflaţi măsura unui unghi, ştiind că măsura complementului său este cu 55^0 mai mică decât două treimi din măsura suplementului său.**

b) **Unghiurile AOB şi BOC sunt neadiacente suplementare. Aflaţi măsurile lor, ştiind că bisectoarea unghiului BOC formează cu [OA un unghi având măsura cu 5^0 mai mare decât măsura unghiului BOC.**

a)

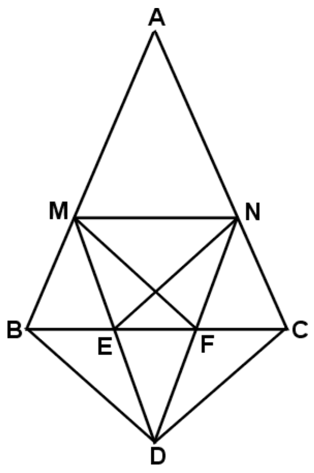
Dacă c reprezintă măsura complementului şi s măsura suplementului unui unghi, atunci $c = s - 90^0$ şi $c = \frac{2}{3}s - 55^0$.	**1p**
Se obţine ecuaţia: $s - 90^0 = \frac{2}{3}s - 55^0$,	**1p**
de unde $\frac{1}{3}s = 35^0$. Rezultă $s = 105^0$ şi de aici măsura unghiului este de $180^0 - 105^0 = 75^0$.	**1p**

b)

	Dacă $m(\sphericalangle BOC) = 2x$, rezultă $m(\sphericalangle AOC) = x + 5^0$	**1p**
	şi $m(\sphericalangle AOB) = 3x + 5^0$.	**1p**
	Şi cum $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^0$, rezultă ecuaţia $3x + 5^0 + 2x = 180^0$.	**1p**
	Cu $x = 35^0$. Şi atunci $m(\sphericalangle AOB) = 110^0$ şi $m(\sphericalangle BOC) = 70^0$.	**1p**

<u>SUBIECTUL 4</u>

Triunghiurile isoscele ABC şi DBC au aceeaşi bază [BC] şi interioarele disjuncte.
Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$, iar $MD \cap BC = \{E\}$, $ND \cap BC = \{F\}$, demonstraţi că $ME = NF$ şi $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.

	$\Delta MBD \equiv \Delta NCD$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle BME \equiv \sphericalangle CNF$.	**2p**
	$\Delta MBE \equiv \Delta CNF$(ULU) $\Rightarrow ME = NF$ şi $BE = CF$.	**2p**
	$\Delta MBF \equiv \Delta NCE$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle CNE$(1),	**1p**
	dar din $AM = AN$, avem $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM$(2).	**1p**
	Din (1) şi (2), rezultă $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.	**1p**

(Variantă: $\Delta MNE \equiv \Delta NMF$(LLL) $\Rightarrow \sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$. Varianta este pentru ultimele 2p).

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2012}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2012}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{2013}\right)=\frac{x}{2013}$.

Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2013}=\frac{x}{2013}$	2p
$\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}=\frac{x}{2013}-\frac{1}{2013}+1$	1p
$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)\left(\frac{x}{2012}+1\right)=\frac{x+2012}{2013}$	1p
$(x+2012)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}-\frac{2012}{2013}\right)=0$	1p
$(x+2012)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)=0$	1p
Cum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}>0$, rezultă soluţia ecuaţiei este -2012.	1p

SUBIECTUL 2

a) **Scrieţi numărul $\frac{1}{2013}$ ca sumă de două fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

b) **Arătaţi că numărul $\frac{1}{2013}$ se scrie ca suma a 2013 fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

$\frac{1}{2013}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2014}$	2p
$=\frac{1}{2013\cdot 2014}+\frac{1}{2014}$.	1p

b)

$\frac{1}{2013}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2015}+\ldots-\frac{1}{4025}+\frac{1}{4025}=$	2p
$\frac{1}{2013\cdot 2014}+\frac{1}{2014\cdot 2015}+\ldots+\frac{1}{4024\cdot 4025}+\frac{1}{4025}$.	2p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

Scrie ecuaţia: $\frac{1}{2013}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ în $\mathbb{N}^*$ şi exprimă o necunoscută în funcţie de cealaltă.	1p
Obţinerea unei soluţii.	2p

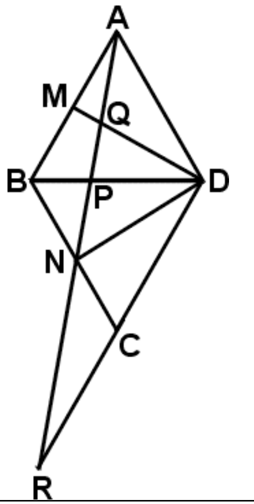
b)

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013}=\frac{2012}{2013}$, rezultă	1p
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2012}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2012}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013\cdot 2012}=\frac{1}{2013}$	2p
Fiind numai 2012 fracţii, de mai scrie prima ca suma a două: $\frac{1}{4024}=\frac{1}{4024\cdot 4025}+\frac{1}{4025}$	1p

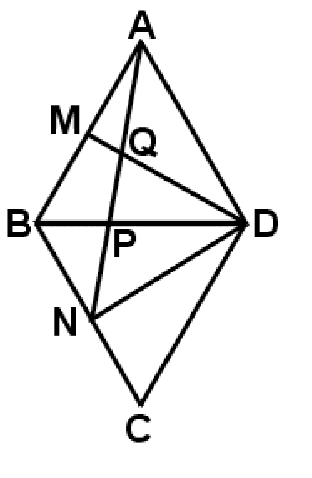
SUBIECTUL 3

În rombul ABCD, m(Â) = 60⁰, M şi N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă AN ∩ BD={P} şi AN ∩ DM={Q}, arătaţi că rapoartele $\frac{PQ}{PN}$ şi $\frac{DQ}{DM}$ au aceeaşi valoare şi să se determine această valoare.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD şi BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în ΔDNQ şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{DQ}{DN}=\frac{DQ}{DM}$.	3p
	Fie {R} = AN ∩ DC. NC ‖ AD şi NC = $\frac{AD}{2}$, rezultă DR = 2· CD = 4· MA	1p
	Şi atunci din ΔQMA ~ ΔQDR(AM ‖ DR), rezultă $\frac{DQ}{MQ}=\frac{DR}{MA}=\frac{4MA}{MA}=4$,	2p
	de aici $\frac{DQ}{DM}=\frac{4}{5}$.	1p

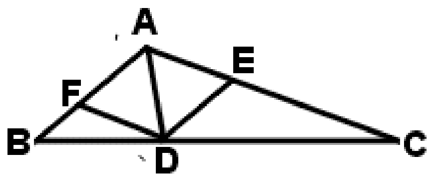
VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD şi BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în ΔDNQ şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{DQ}{DN}=\frac{DQ}{DM}$.	3p
	Pentru calculul valorii se poate utiliza şi că P este centru de greutate în ΔABC. $PN=\frac{1}{2}AP$	1p
	şi cu teorema bisectoarei $\frac{PQ}{AQ}=\frac{DP}{AD}=\frac{DP}{BD}=\frac{2}{3}$ (deoarece $\frac{DP}{BP}=\frac{AD}{BN}=2$),	1p
	de unde $\frac{PQ}{AP}=\frac{2}{5}$ sau $PQ=\frac{2}{5}AP$.	1p
	Şi atunci $\frac{PQ}{PN}=\frac{2}{5}\cdot 2=\frac{4}{5}$.	1p

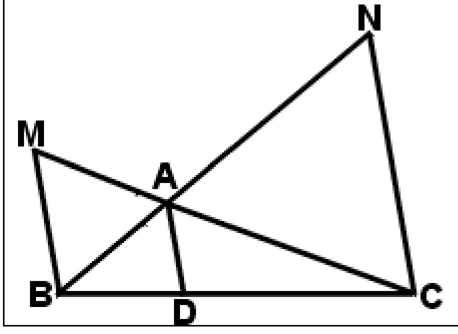
SUBIECTUL 4

În triunghiul ABC, m(Â) = 120⁰, AB = 42 cm, AC = 56 cm, iar [AD este bisectoare, D∈(BC).
Aflaţi lungimea segmentului [AD].

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Fie DE ‖ AB, E∈(AC), DF ‖ AC, F∈(AB).	2p
	Patrulaterul AEDF este romb.	1p
	$\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}$, $\frac{DF}{AC}=\frac{BD}{BC}$, dă $\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}=1$, (sau $\frac{AE}{AC}=\frac{BD}{BC}$, $\frac{AF}{AB}=\frac{DC}{BC}$)	2p
	cum DE = DF = AD, se obţine $AD\left(\frac{1}{42}+\frac{1}{56}\right)=1$,	1p
	de unde AD = 24 cm.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Fie BM ‖ AD, M∈AC şi CN ‖ AD, N∈AB.	2p
	Triunghiurile ABM şi ACN sunt echilaterale de laturi 42, respectiv 56.	1p
	$\frac{AD}{BM}=\frac{DC}{BC}$ şi $\frac{AD}{CN}=\frac{BD}{BC}$,	1p
	rezultă $\frac{AD}{BM}+\frac{AD}{CN}=1$	2p
	şi $\frac{AD}{42}+\frac{AD}{56}=1$, de unde AD = 24 cm.	1p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia: $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)}=\dfrac{2(x+y)}{2xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.	**2p**
Şi atunci ecuaţia devine: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2}$; x şi y numere întregi nenule.	**1p**
$x=-\dfrac{2y}{y+2}$ şi atunci	**1p**
$x=-2+\dfrac{4}{y+2}$	**1p**
de unde $y+2\in\{\pm1; -2; \pm4\}$.	**1p**
Se obţine mulţimea soluţiilor: $S=\{(-6,-3); (-3,-6); (-4,-4); (-1,2); (2,-1)\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

Fie $a\geq b>0$, m_a, m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor a şi b, atunci $\dfrac{m_a}{m_g}+\dfrac{m_g}{m_a}\leq\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

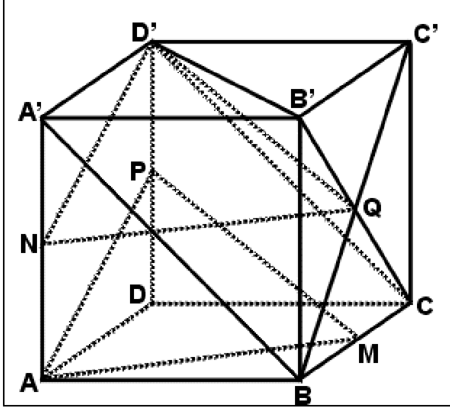
Dacă se notează $\dfrac{m_a}{m_g}=x$	**1p**
şi având $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{4m_a^2}{m_g^2}-2$	**2p**
se obţine inegalitatea: $x+\dfrac{1}{x}\leq 4x^2-2$.	**1p**
Această inegalitate devine: $4x^3-x^2-2x-1\geq0$	**1p**
sau $(x-1)(4x^2+3x+1)\geq0$, inegalitate adevărată, deoarece $x\geq1$ şi $4x^2+3x+1>0$.	**2p**

SUBIECTUL 3

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [AA'], [DD'], [BC'].

a) Aflaţi măsura unghiului dintre D'Q şi A'B.

b) Demonstraţi că planele (D'NQ) şi (AMP) sunt paralele, iar dacă lungimea muchiei cubului este de 12 cm, determinaţi distanţa dintre ele.

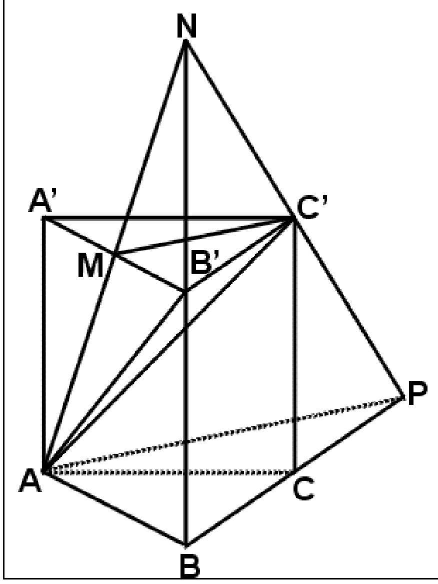
	**a**) A'B ∥ D'C, rezultă m(∢(D'Q, A'B)) = m(∢(D'Q, D'C)).	**1p**
	ΔB'D'C fiind echilateral şi Q mijlocul lui [B'C], rezultă m(∢(D'Q, A'B))= 30^0.	**2p**
	b) AM ∥ NQ, AP ∥ ND' şi AM ∩ AP = {A}, rezultă (AMP) ∥ (D'NQ).	**1p**
	Distanţa dintre plane este egală cu distanţa oricărui punct dintr-un plan la celălalt plan.	**1p**
	Să luăm d(N, (AMP)). Avem: $\mathcal{A}_{AMP}\cdot$ d(N, (AMP)) = $\mathcal{A}_{ANP}\cdot$ d(M, (ANP)).	**1p**
	ΔAMP este isoscel de laturi $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{6}$, se obţine $\mathcal{A}_{AMP}=18\sqrt{21}$. $18\sqrt{21}\cdot$ d(N, (AMP)) = 36· 12, de unde d(N, (AMP)) = $\dfrac{8\sqrt{21}}{7}$.	**1p**

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C', M este mijlocul segmentului [A'B'], AB = AA' = 12 cm.

a) Aflaţi distanţa de la punctul B' la dreapta de intersecţie a planelor (AMC') şi (ABC).

b) Dacă {N} = BB' $\cap$ (AMC') şi {P} = BC $\cap$ (AMC'), determinaţi aria triunghiului ANP.

	**a**) AM $\cap$ BB'={N}, unde BN=24 cm, NC' $\cap$ BC={P}, unde BP=24 cm.	**1p**
	În ΔAPC, m(∢C)=120^0 şi AC=PC, rezultă m(∢A) = 30^0 şi atunci m(∢BAP)=90^0.	**1p**
	Cum AP este dreapta de intersecţie a planelor, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă că B'A reprezintă distanţa de la B' la AP. B'A=$12\sqrt{2}$ cm. (Sau calculând laturile ΔB'AP).	**1p**
	b) NB $\perp$ (ABC), BA $\perp$ AP, BA, AP $\subset$ (ABC), rezultă NA $\perp$ AP şi atunci ΔANP este dreptunghic în A. (Sau calculând laturile ΔANP).	**1p**
	AN=$\sqrt{AB^2+BN^2}=\sqrt{12^2+24^2}=12\sqrt{5}$, AP=$\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{24^2-12^2}=12\sqrt{3}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{ANP}=72\sqrt{15}$.	**1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Comparaţi numerele: $x = 2^{222} + 2^{202}$ şi $y = 2^{221} + 2^{220} + 2^{212}$.

RMT 4/2008

SUBIECTUL 2

Fie numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{511}$.

a) **Arătaţi că numărul $A + 1$ este divizibil cu 512.**
b) **Aflaţi restul împărţirii numărului $A - 1$ la 512.**

SUBIECTUL 3

a) **Daţi un exemplu de triplet (a, b, c), unde a, b, c şi $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.**
b) **Arătaţi că există o infinitate de triplete (a, b, c), unde a, b, c şi $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.**

SUBIECTUL 4

a) **Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}$ împărţit la $\overline{bc}$ dă câtul 3 şi restul 4.**
b) **Aflaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, ştiind că $\overline{abcd}$ împărţit la $\overline{bcd}$ dă câtul 33 şi restul 32.**

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi cel mai mic număr natural n, de patru cifre, ştiind că $n - 19$ este divizibil cu 28 şi $n - 31$ este divizibil cu 36.

SUBIECTUL 2

Aflaţi numerele prime a, b, c, ştiind că $a + b = 380$ şi $6a + 15b + 29c = b^4$.

SUBIECTUL 3

a) **Aflaţi măsura unui unghi, ştiind că măsura complementului său este cu 55^0 mai mică decât două treimi din măsura suplementului său.**
b) **Unghiurile AOB şi BOC sunt neadiacente suplementare. Aflaţi măsurile lor, ştiind că bisectoarea unghiului BOC formează cu [OA un unghi având măsura cu 5^0 mai mare decât măsura unghiului BOC.**

SUBIECTUL 4

Triunghiurile isoscele ABC şi DBC au aceeaşi bază [BC] şi interioarele disjuncte.
Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$, iar $MD \cap BC = \{E\}$, $ND \cap BC = \{F\}$, demonstraţi că $ME = NF$ şi $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2012}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2012}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{2013}\right)=\frac{x}{2013}$.

RMT 1/2009(ENUNŢ ACTUALIZAT)

SUBIECTUL 2

a) **Scrieţi numărul $\frac{1}{2013}$ ca sumă de două fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

b) **Arătaţi că numărul $\frac{1}{2013}$ se scrie ca suma a 2013 fracţii cu numărătorul 1 şi numitori diferiţi.**

SUBIECTUL 3

În rombul ABCD, $m(\hat{A}) = 60^0$, M şi N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă $AN \cap BD=\{P\}$ şi $AN \cap DM=\{Q\}$, arătaţi că rapoartele $\frac{PQ}{PN}$ şi $\frac{DQ}{DM}$ au aceeaşi valoare şi să se determine această valoare.

SUBIECTUL 4

În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 120^0$, AB = 42 cm, AC = 56 cm, iar [AD este bisectoare, $D \in (BC)$. Aflaţi lungimea segmentului [AD].

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia: $\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2}$.

RMT 4/2009

SUBIECTUL 2

Fie $a \geq b > 0$, m_a, m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor a şi b, atunci $\frac{m_a}{m_g}+\frac{m_g}{m_a} \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

RMT 4/2010

SUBIECTUL 3

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [AA'], [DD'], [BC'].

a) **Aflaţi măsura unghiului dintre D'Q şi A'B.**
b) **Demonstraţi că planele (D'NQ) şi (AMP) sunt paralele, iar dacă lungimea muchiei cubului este de 12 cm, determinaţi distanţa dintre ele.**

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C', M este mijlocul segmentului [A'B'], AB=AA'=12 cm.

a) **Aflaţi distanţa de la punctul B' la dreapta de intersecţie a planelor (AMC') şi (ABC).**
b) **Dacă $\{N\} = BB' \cap (AMC')$ şi $\{P\} = BC \cap (AMC')$, determinaţi aria triunghiului ANP.**

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.