Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1.

(i) Să se arate că pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$4(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2.$$

(ii) Dacă $u,v,t \in \mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte pare, arătați că $u+v+t$ este suma a patru pătrate perfecte.

2.

(i) Dacă $t \in \mathbb{R}^*$ și $t-\frac{3}{t}=2$, să se arate că $t \in \{-1,3\}$.

(ii) Numerele reale a și b verifică egalitatea $a^2 \cdot b^{-2} - 3a^{-2} \cdot b^2 = 2$. Să se arate că a și b nu pot fi simultan raționale.

GM 2014

3. Într-un paralelipiped dreptunghic suma tuturor muchiilor este 76 cm, iar lungimea diagonalei este 13 cm. Calculaţi $(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(a+b-c)\cdot(-a+b+c)+(a-b+c)\cdot(-a+b+c)$, unde a,b și c sunt dimensiunile paralelipipedului.

SGM 2015

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu muchiile opuse perpendiculare. Fie $AE \perp BC$, $E \in BC$, $AF \perp CD$, $F \in CD$. Fie $BF \cap DE = \{R\}$ și $CR \cap BD = \{J\}$.

(i) Demonstraţi că $DE \perp BC$.

(ii) Demonstraţi că $AJ \perp BD$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1.

(i) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ **1p**

Finalizare **2p**

(ii) $u=(2n)^2, v=(2m)^2, u=(2p)^2$ unde m,n,p sunt numere naturale. **1p**

Se aplică rezultatul din (i). **3p**

2. **(i)** Se aduce la forma $t^2-2t-3=0$ **1p**

de unde, prin descompunere $(t+1)(t-3)=0$ rezultă $t\in\{-1,3\}$. **2p**

(ii) Se notează $\frac{a^2}{b^2}=t$ ecuația $a^2\cdot b^{-2}-3a^{-2}\cdot b^2=2$ devine $t-\frac{3}{t}=2$ **2p**

$\frac{a^2}{b^2}=-1$ nu are soluții reale. $\frac{a^2}{b^2}=3$ implică $a^2=3b^2$ **1p**

Finalizare **1p**

3.

Fie S suma tuturor muchiilor, atunci $S=4(a+b+c)=76$, de unde $a+b+c=19$ **2p**

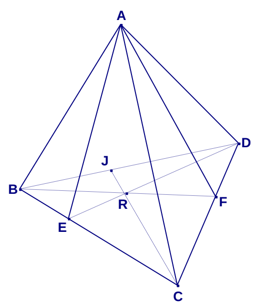
Din $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13$ se obţine $a^2+b^2+c^2=169$ **2p**

$E=(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)$ **2p**

Finalizare $E=19^2-2\cdot 169=361-338=23$ **2p**

4.

(i) **3p**



Din ipoteză obţinem $BC\perp(AED)$, deci $BC\perp DE$.

(ii)

Analog $CD\perp BF$, deci R este ortocentrul triunghiului BCD. **2p**

Atunci $CR\perp BD$, $BD\perp(ACR)$ şi concluzia **2p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro