

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

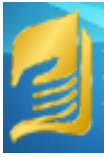


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a^2 - a + 1)x + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că $a^2 - a + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$
 - Demonstrați că $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.
 - Comparați numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ și $f(\sqrt{2} + 2)$.
- Fie pătratul $ABCD$ de latura 4, în care $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul segmentului $[BO]$.
Considerăm punctul N astfel încât $\overline{CN} = \overline{DO}$.
 - Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO} = 2 \cdot \overline{AM}$.
 - Determinați lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.
 - Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.
- Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1 \neq 0$.
 - Demonstrați că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$.
 - Verificați relația $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \forall n \geq 1$.
 - Demonstrați că $S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1$.
- Demonstrați că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \geq 1$
 - La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori, etc. După câte minute stadionul se va umple?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

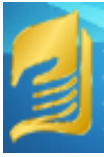
a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + \dots + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai și 10 gogoși, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai și 7 gogoși, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai și o gogoasă ?

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Știind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

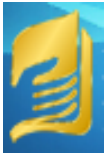


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A \cdot A^T - x \cdot I_2)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A .
- Demonstrați că $f(0) \geq 0$.
 - Găsiți $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
 - Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(-n) + f(-n+1) + \dots + f(n-1) + f(n) - 2n - 1}{n^3} \right)$
2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0, 1, 2\}$, se numește **echilibrată** dacă oricare două elemente aflate pe aceeași linie și aceeași coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este matrice **echilibrată**.
- Justificați că matricea I_2 este matrice **echilibrată**.
 - Câte matrice **echilibrate** se pot construi ?
 - Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice **echilibrată**.
3. a) Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{x + q}$, $m, n, p, q \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.
Să se determine $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită asimptotele $x = 2$ și $y = 3x - 1$, iar $A(1, 3)$ să fie punct al graficului.
- b) Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x) - \sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
Calculați $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.
4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- Demonstrați că $A^4 = B^3$.
 - Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX + XB = I_2$.
 - Verificați egalitatea $AB + C + I_2 = O_2$, unde $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și apoi demonstrați că $(AB)^n \neq I_2$, $(\forall) n \geq 1$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

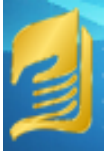


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru e . Demonstrați că :
 - a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a, b \in G$.
 - b) Dacă $a, b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ și $a ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:
 - a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx$.
3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$
 - a) Calculați X^2, X^3 .
 - b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.
 - c) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.
 - d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.
4. Se consideră integrala nedefinită $I(x, n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx$, unde $x \in (0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculați $I(x, 0)$.
 - b) Calculați $I(x, 1)$.
 - c) Calculați $I(x, n)$, pentru $n \geq 2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a^2 - a + 1)x + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $a^2 - a + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$
 - Demonstrați că $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.
 - Comparați numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ și $f(\sqrt{2} + 2)$.

Soluție:

- Obține $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ 2 puncte
- Obține $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a^2 - a + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ 3 puncte
- Pentru $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ va rezulta $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$ și cum $x - y > 0$ vom obține $f(x) > f(y)$ 2 puncte

2. Fie pătratul $ABCD$ de latura 4, în care $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul segmentului $[BO]$.

Considerăm punctul N astfel încât $\overline{CN} = \overline{DO}$.

- Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO} = 2 \cdot \overline{AM}$.

b) Determinați lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO}$, utilizând eventual formula

$$\text{medianei } m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

- Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.

Soluție:

- $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO} = \overline{AB} + \overline{AO} = 2 \cdot \overline{AM}$ 2 puncte
- $|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO}| = |2\overline{AM}| = 2\sqrt{10}$ 2 puncte
- Obține $\overline{AN} = \overline{AC} + \overline{CN} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CN} = 2 \cdot \overline{AM}$, deci A, M, N - coliniare 3 puncte

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1 \neq 0$.

- Demonstrați că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$.

b) Verificați relația $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \forall n \geq 1.$

c) Demonstrați că $S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1.$

Soluție:

a) Obține $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + na_1) \cdot n}{2} = \frac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$ 2 puncte

b) Obține $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 2 puncte

c) Obține $S = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$ 3 puncte

4. a) Demonstrați că $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2, \forall n \geq 1$

b) La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori, etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Soluție:

a) Observă că șirul $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ sunt primii n termeni ai unei progresii aritmetice, deci

$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2, \forall n \geq 1$ 3 puncte

sau $1+3+5+\dots+(2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n^2$ 3 puncte

b) Numărul spectatorilor veniți în primele n minute va fi

$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$, deci $n^2 = 10000$, adică $n = 100$ min 4 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

1. Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile :

- a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,
b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

Soluție:

- a) Notăm $3^{\frac{1}{2x}} = a$ și obținem $a^2 - 2a - 3 = 0$ 1 punct
Rezolvând se obține $a = -1$ sau $a = 3$. Convine numai $a = 3$, deci $x = \frac{1}{2}$ 2 puncte
b) Din condițiile de existență deducem că $x > 0$.
Folosind proprietățile logaritmilor se obține $\log_3 x^2 = \log_3 (x+6)$ 2 puncte
Rezolvând se obține că $x = 3$ sau $x = -2$ și convine numai $x = 3$ 2 puncte

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

- a) Demonstrați că z^3 este număr real.
b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + \dots + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

Soluție:

- a) Observăm că $z \neq 2$, deci $z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 8$ 4 puncte
sau
Rezolvând ecuația $z^2 + 2z + 4 = 0$, obținem z_1, z_2 2 puncte
Prin ridicare la cub deducem, în fiecare caz, că $z^3 = 8$ 2 puncte
b) Grupând termenii câte trei și folosind $z^2 + 2z + 4 = 0$, se deduce că
 $(z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014}) + (2^3 \cdot z^{2013} + 2^4 \cdot z^{2012} + 2^5 \cdot z^{2011}) +$
 $+ \dots + (2^{2013} \cdot z^3 + 2^{2014} \cdot z^2 + 2^{2015} \cdot z) + 2^{2016} = 2^{2016}$ 3 puncte

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai și 10 gogoși, plătiind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai și 7 gogoși, plătiind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai și o gogoasă ?

Soluție:

Fie s - prețul unui sandvici, c - prețul unei cești de ceai și g - prețul unei gogoși 1 punct

Din enunț avem : $\begin{cases} 4s + c + 10g = 16,9 \\ 3s + c + 7g = 12,6 \end{cases}$ 2 puncte

Înmulțind prima ecuație cu 2 și pe a doua cu 3 obținem $\begin{cases} 8s + 2c + 20g = 33,8 \\ 9s + 3c + 21g = 37,8 \end{cases}$ 2 puncte

Scăzând ecuațiile obținem $s + c + g = 4$ 1 punct

Așadar suma plătită de cel de-al treilea elev este de 4 lei 1 punct

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Știind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

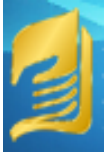
Soluție:

Fie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, numerele scrise pe tablă 1 punct

Avem $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_4) \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2(b_1 + b_4) \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2(c_1 + c_4) \end{cases}$ 2 puncte

Suma tuturor numerelor de pe tablă este $S = 2(a_1 + b_1 + c_1 + a_4 + b_4 + c_4)$ 2 puncte

Pe de altă parte $S = 2 \left[\frac{(a_1 + c_1) \cdot 3}{2} + \frac{(a_4 + c_4) \cdot 3}{2} \right] = 3(a_1 + c_1 + a_4 + c_4) = 2016$ 2 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A \cdot A^T - x \cdot I_2)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A .
- Demonstrați că $f(0) \geq 0$.
 - Găsiți $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
 - Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(-n) + f(-n+1) + \dots + f(n-1) + f(n) - 2n - 1}{n^3} \right)$

Soluție:

- $f(0) = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = [\det(A)]^2 \geq 0$, sau calcul direct 2 puncte
 - Obține $f(x) = x^2 - 3x + 1$, deci $a = c = 1, b = -3$ 3 puncte
 - Obține $f(-n) + \dots + f(n) - 2n - 1 = 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ 1 punct
- Finalizare : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(-n) + f(-n+1) + \dots + f(n-1) + f(n) - 2n - 1}{n^3} \right) = \frac{2}{3}$ 1 punct

2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0, 1, 2\}$, se numește **echilibrată** dacă oricare două elemente aflate pe aceeași linie și aceeași coloană sunt numere consecutive.

De exemplu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este matrice **echilibrată**.

- Justificați că matricea I_2 este matrice **echilibrată**.
- Câte matrice **echilibrate** se pot construi ?
- Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice **echilibrată**.

Soluție:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și constatăm că este formată cu elemente din mulțimea specificată și pe orice linie și orice coloană sunt numere consecutive, deci este matrice **echilibrată** 2 puncte
- Dacă $a_{11} = 0$, atunci $a_{12} = a_{21} = 1$ iar a_{22} poate fi ales în două moduri, deci există 2 matrice de acest tip. La fel dacă $a_{11} = 2$ vor exista două matrice de acest tip 1 punct

Dacă $a_{11} = 1$, atunci $a_{22} = 1$ iar celelalte elemente pot fi alese în câte două moduri, deci există 4

matrice de acest tip, și anume: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 1 punct

Finalizare : există opt matrice **echilibrate** 1 punct

c) Deoarece o matrice **echilibrată** are elementele de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană numere consecutive, rezultă că regula se aplică și matricei transpuse 2 puncte
Sau prin verificarea directă a celor opt matrice anterior construite.

3. a) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{x + q}, m, n, p, q \in \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.

Să se determine $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită asimptotele $x = 2$ și $y = 3x - 1$, iar $A(1, 3)$ să fie punct al graficului.

b) Considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x) - \sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Calculați $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Soluție:

a) $x = 2$ este asimptotă verticală dacă și numai dacă $2 + q = 0$ și $4m + 2n + p \neq 0$, deci $q = -2$ (1)

..... 1 punct

$A(1, 3)$ aparține graficului lui f , rezultă (ținând cont de relația (1)) că avem $m + n + p = -3$ (2)

..... 1 punct

Celelalte condiții:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow m = 3$ 1 punct

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) = -1 \Leftrightarrow n = -7 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} p = 1$ 1 punct

b) Putem scrie $-x^4 + \sin^3 2x \leq f(x) \leq x^4 + \sin^3 2x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ 1 punct

Se obține $-x + \frac{\sin^3 2x}{8x^3} \cdot 8 \leq \frac{f(x)}{x^3} \leq x + \frac{\sin^3 2x}{8x^3} \cdot 8, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$ 1 punct

Trecem la limită, se obține $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 8$ 1 punct

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^4 = B^3$.

b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX + XB = I_2$.

c) Verificați egalitatea $AB + C + I_2 = O_2$, unde $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și apoi demonstrați că

$(AB)^n \neq I_2, (\forall) n \geq 1$

Soluție:

a) Obține $A^2 = -I_2, A^4 = I_2$ 1 punct

Obține $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = I_2$ 1 punct

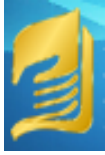
b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $AX = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ și $XB = \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{pmatrix}$

Relația $AX + XB = I_2$ conduce la $\begin{cases} c - b = 1 \\ a + d - b = 0 \\ a + d = 0 \\ -b + c - d = 1 \end{cases}$, de unde $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2 puncte

c) Se verifică prin calcul că $AB + C + I_2 = O_2$ 1 punct

Prin calcul direct, sau folosind formula binomului lui Newton, se obține că:

$(AB)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, (\forall) n \geq 1$ 2 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru e . Demonstrați că :

a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a, b \in G$.

b) Dacă $a, b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ și $a ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.

Soluție:

a) Avem $(a^{-1}ba)^3 = (a^{-1}ba)(a^{-1}ba)(a^{-1}ba) = a^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot b \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot b \cdot a = a^{-1} \cdot b^3 \cdot a$

..... 2 puncte

b) Ridicăm prima egalitate la puterea a treia și raționăm ca la a) și obținem $a^{-2}b^3a^2 = e$ 2 puncte

Înlocuim b^3 ținând cont de a doua egalitate, avem:

$a^{-2}(aba^{-2})a^2 = e \Leftrightarrow (a^{-2}a)b(a^{-2}a^2) = e \Leftrightarrow a^{-1}be = e$. Deci $a^{-1}b = e$ rezultă $a = b$ (1) 2 puncte

Finalizare: Înlocuim în prima egalitate, obținem $a^{-2}aa^2 = e$, deci $a = e$ și din (1) obținem $a = b = e$.

..... 1 punct

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:

a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx$.

Soluție:

a) Calculează $f'(x) = e^x \cos^2 x - e^x \sin 2x + 2016e^x$ 1 punct

Finalizare: $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ 1 punct

b) Obține $I = \int \frac{e^x \sin 2x + 1}{1 + e^x(\cos^2 x + 2016)} dx$ 2 puncte

$= \int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)} dx = \int dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 2 puncte

Finalizare: $= x - \ln|f(x)| + C = x - \ln[e^x(\cos^2 x + 2016) + 1] + C$ 1 punct

3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ și

mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$

a) Calculați X^2, X^3 .

b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.

c) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.

d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.

Soluție:

a) $X^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}; X^3 = \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$ 1 punct

b) Avem $X^2 = 2X$

$$M(r) \cdot M(s) = (I_2 + rX) \cdot (I_2 + sX) = I_2^2 + rXI_2 + sXI_2 + rsX^2 = I_2 + rX + sX + rsX^2 = I_2 + rX + sX + 2srX = I_2 + (r + s + 2rs)X = I_2 + tX, \quad t = r + s + 2rs \in \mathbb{R}$$

Deoarece $r \neq -\frac{1}{2}, s \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow (2r+1) \cdot (2s+1) \neq 0$, deci $r + s + 2rs \neq -\frac{1}{2}$ 2 puncte

c) Asociativitatea, comutativitatea 1 punct

$I_2 = M(0) \in G$, element neutru. Inversa matricei $M(r)$ din G este $M(r^*) = M(-\frac{r}{1+2r}) \in G$

Deci (G, \cdot) este grup comutativ 1 punct

d) $((M(r))^3 = I_2 + (3r + 6r^2 + 4r^3)X), (M(r))^3 = I_2 + 13X$. Deci avem $3r + 6r^2 + 4r^3 = 13$

..... 1 punct

$(r-1)(4r^2 + 10r + 13) = 0 \Rightarrow r = 1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Am obținut că $M(1) = I_2 + X$ este soluția ecuației date 1 punct

4. Se consideră integrala nedefinită $I(x, n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx$,

unde $x \in (0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați $I(x, 0)$.

b) Calculați $I(x, 1)$.

c) Calculați $I(x, n)$, pentru $n \geq 2$.

Soluție:

a) $I(x, 0) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx$

Obține $\frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right)$ 2 puncte

Obține $\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{x \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x+2)} \right) + C$ 1 punct

b) $I(x, 1) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1} dx = \int \frac{2x+3}{(x^2 + 3x + 1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + 3x + 1} + C$ 2 puncte

c) $I(x, n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \arctg \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{n-1}} \right) + C$ 2 puncte