INSPECTORATUL
ŞCOLAR
JUDEȚEAN
SATU MARE

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

1.a) Es sei x, y reelle Zahlen so, dass : $9x^2+25y^2-6x\sqrt{3}-10y\sqrt{5}+8=0$.

Zeigt, dass: $x^2 - y^2 = 2x^2y^2$.

prof.Gheorghe Moldovan, Medieşu Aurit

b) Wenn x,y,z,$t \in$R, zeigt dass : $xy(z^2-t^2)^2 \geq (xz^2-yt^2)(yz^2-xt^2)$.

prof. Ovidiu Pop, C.N.”M.Eminescu”

2 .a) Zeigt, dass : $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} \in N$

prof. Monica Amic, Acâş

b) i) Zeigt, dass das Produkt zweier nachfolgenden Quadratzahlen kann man als die Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

ii) Eventuel mit Hilfes von i) zeigt dass $(a^2+1)(b^2+1) \geq 2(ab-1)(a+b)$, für jedwelche nichtnullen natürlichen Zahlen a und b.

prof. Bud Adrian, Negreşti-Oaş

3. Auf die Ebene des Quadrates ABCD, mit AB = 6 cm errichtet man die Senkrechten MD und NC die in derselbe Halbebene sind so, dass MD= 6cm, NC=9 cm, AC$\cap$ BD = $\{O\}$.

a) Zeigt, dass der Punkten A,B,M,N nicht kopplanar zind;

b) Bestimmt die Abstand von der Punkt M zu AC;

c) Beweist dass MN $\perp$ MO und finde die Flächeninhalt des Dreiecks OMN.

prof. Adriana Boroş, Livada

4. Es sei SABCD ein regelmäßige vierseitige Pyramide. AM steht senkrecht auf SB, M$\in$ SB, BN steht senkrecht auf SC, N$\in$ SC, CP steht senkrecht auf SD, P$\in$ SD, DQ steht senkrecht auf SA, Q $\in$ SA und R ist die symmetrische Punkt des Punktes N in Bezug von AC.

a) Beweist dass die Punkten B, R, Q, D koplanar sind;
b) Berechnet die Maßzahl des Winkels zwischen die Geraden MP und RQ.

Gazeta Matematică nr.11/2012

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

INSPECTORATUL
ŞCOLAR
JUDEȚEAN
SATU MARE

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

1. a) $\left(3x-\sqrt{3}\right)^2+\left(5y-\sqrt{5}\right)^2=0$ ……………………………………………2p

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ si $y=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………..……………………………………………1p

Finalizare …..…………………………………………………………………………..1p

b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$xyz^4-2xyz^2t^2+xyt^4\geq xyz^4-x^2z^2t^2-y^2z^2t^2+xyt^4$ …………………..……………………. 2p.

Echivalent cu $z^2t^2(x-y)^2\geq 0$ ……………………………………………………………………………1p

2. a) $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$

- după raționalizarea numitorilor obținem

$\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\dots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025}=$ ………………………………… 1p

$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\dots-\sqrt{2024}+\sqrt{2025}=$ ……………………… ……………………………………………1p

$=-1+45=44\in\mathbb{N}$ $\quad(\sqrt{2025}=45)$…………………….………..1p

b) i) $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$ ……………………………….1p

$=(ab-1)^2+(a+b)^2$ ……………………………………………………………..1p

ii) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2\geq 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2}$ ……………. 1p

$=2(ab-1)(a+b)$ …………………………………………………………...1p

3. a) Presupunem prin absurd că A, M, N, B sunt coplanare. Obținem că MN || AB, contradicție..2p

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

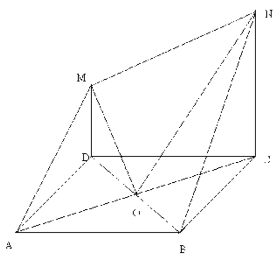
Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

b) Folosind teorema celor trei perpendiculare, se obține d (M, AC)= MO. 1p

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDO obținem MO= $3\sqrt{6}$ cm............1p

c)Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NCO obținem NO = $3\sqrt{11}$ cm..........1p

In trapezul dreptunghic MNCD se obține MN = $3\sqrt{5}$ cm...1p



Conform reciprocii teoremei lui Pitagora triunghiul MON este dreptunghic deci MN $\perp$ MO. Daca triunghiul MON este dreptunghic, atunci $A_{MON} = \dfrac{MN \cdot MO}{2} = \dfrac{9\sqrt{30}}{2} cm^2$ 1p

4. a)SABCD – piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow$AQ$\equiv$ NC

Fie QE perpendicular pe AC, deci AE$\equiv$ CF, OE $\equiv$ OF, EQ$\equiv$ NF ,
NF este perpendicular pe AC, QE|| NF,……………..………………………………………………………1p

Deci EQFR este
paralelogram……………………………………………………………………………………1p

RQ$\cap$ EF= {O}, QR$\cap$ BD= {O} deci B,R,Q , D sunt coplanare………………………………………………1p

b)BM$\equiv$ DP, SBD triunghi isoscel, deci PM|| BD…………………………………………….…………1p

Unghiului dintre dreptele MP şi RQ este congruent cu unghiului dintre dreptele BD şi RQ……1p

BD este perpendicular pe planul (ASC) şi OQ inclusă în planul (ASC), deci BD este perpendicular

pe OQ……………………………………………………………………………………………1p

Deci, măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ este 90°…………………………………………………..1p